QA685
.K6

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

http://www.archive.org/details/nichteuklidische02klei

Nicht-Euklidische Geometrie, II.

Vorlesung,

gehalten während des Sommersemesters 1890

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

— Zweiter Abdruck. —

GÖTTINGEN 1893.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Nicht-Euklidische Geometrie. II.

Vorbemerkungen 1

I. Einleitung in die projective Raumgeometrie.

Punkt- und Ebenen-Coordinaten 2
Liniencoordinaten 9
Complexe, Congruenzen etc. 23
Congruenzen mit imaginären Leitlinien 33

II. Imaginäre Raumelemente.

Imaginäre Punkte und Ebenen 38
Imaginäre Gerade insbesondere 40

III. Allgemeines über Flächen zweiten Grades.

Algebraische Eigenschaften, Eintheilung der F_2 47
Realitätsunterschiede der ovalen, ringförmigen, nulltheiligen F_2 55

IV. Gerade Linien auf den F_2.

Ringförmige Flächen 66
Nulltheilige F_2; die ausgezeichneten Congruenzen 75
Ovale F_2; Beziehungen zur Functionentheorie 82

V. Collineationen des Raumes.

Ueberhaupt 91
einer F_2 in sich 97

VI. Speciell bei der nulltheiligen F_2.

Cayley's allgemeine Formel für orthogonale Substitutionen 108
Specielle Formeln für $n = 4$ 113
Beziehungen zur Quaternionentheorie 120

VII. Bei der ringförmigen F_2.

Projective Geometrie auf der F_2 125
Maassgeometrie ebendaselbst 133

VIII. Ovale Flächen.

Parametervertheilung über die Fläche hin 142
Verschiedene Arten zugehöriger Maassgeometrie, Doppelverhältniss von 4 Puncten der Fläche 151

Seite

Ueberhaupt viererlei Geometrie auf der Fläche; zugehörige Gruppe und Invariantentheorie 160
Bedeutung dieser Geometrieen für Functionentheorie 170
Kinematisches zur einzelnen linearen Substitution 177

IX. Einordnung der Metrik in das projective System.

Kugelkreis 191
Grundsätze der Kinematik 199
Mechanik freier Systeme, Potential 203
Mechanik starrer Körper schlechtweg (Schraubentheorie) 211
Massengeometrie 217

X. Specielle Bemerkungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

Allgemeine Distanzformeln 224
Die Schiebungen der elliptischen Geometrie 231
Clifford's Parallelen 234-238

Die Aufgabe dieser Vorlesung läßt sich leicht bezeichnen, insofern es sich um eine Fortsetzung der Vorlesung des letzten Semesters handelt. Wir hatten uns dort die Beschränkung auferlegt, uns nur in zwei Dimensionen, in der Ebene zu bewegen. Wir werden daher jetzt drei Dimensionen betrachten und in ihnen analogen Untersuchungen uns widmen. Diese Erweiterung wird wenig principielle Schwierigkeiten, dafür aber besonderes Interesse bieten. Beispielsweise werden wir, wenn wir die Cayleysche Maassbestimmung für den Raum haben, die hierauf sich stützende Kinematik betrachten und dadurch der Mechanik der gewöhnlichen Geometrie die Mechanik der Nicht-Euklidischen Geometrie gegenüber stellen. Ferner werden wir für die Funktionentheorie neue Hülfsmittel gewinnen, entsprechend dem im vorigen Semester bereits für die Ebene ausgesprochenen Gedanken, daß die Nicht-Euklidische Geometrie für die moderne Funktionentheorie besonders wichtig ist.

Im übrigen wollen wir gleich ähnlich einteilen, wie im vorigen Semester: wir werden wieder zwei Hauptteile zu unterscheiden haben. Im ersten Teil müßen wir uns mit der projektiven Geometrie des Raumes vertraut machen; dieser Abschnitt wird daher den Charakter einer Einleitung haben. Der zweite Teil wird sich mit der Einordnung der metrischen Beziehungen in die projektive

Geometrie beschäftigen; wir sagen allgemein mit „der Einordnung der metrischen Beziehungen," weil wir nicht nur die Verhältnisse der Cayley'schen Maassbestimmung, sondern auch die gewöhnliche Euklidische vom projektiven Standpunkte aus betrachten wollen:

Erster Teil: Einleitung:

Projektive Geometrie des Raumes.

Es ist wohl billig, zunächst von den Grundgebilden und ihren Coordinaten zu reden. Das erste Grundgebilde ist der Punkt, demselben steht dualistisch als zweites Grundgebilde die Ebene gegenüber.

Sprechen wir zuerst vom Punkte. Statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z werden wir in unserer Vorlesung durchaus Tetraedercoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gebrauchen, deren Verhältnis $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ allein in Betracht kommt. Wir definieren dieselben zunächst am kürzesten, indem wir von den x, y, z ausgehen.

Wir setzen:

$$\varrho x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \alpha_{14},$$
$$\varrho x_2 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + \alpha_{24},$$
$$\varrho x_3 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + \alpha_{34},$$
$$\varrho x_4 = \alpha_{41} x + \alpha_{42} y + \alpha_{43} z + \alpha_{44}.$$

In Worten: Die Tetraedercoordinaten verhalten sich wie

ganze lineare Funktionen der gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, wobei jedoch die Bedingung zu erfüllen ist, daß die Determinante der Coefficienten $|\alpha_{ik}| \gtrless 0$ sein soll. Anderenfalls wären die x_1, x_2, x_3, x_4 nicht als Coordinaten zu benutzen, da wir nicht umgekehrt die x, y, z durch dieselben ausdrücken könnten.

Hieran knüpfen sich nun gleich einige Bemerkungen. Setzen wir die rechten Seiten der obigen Beziehungen gleich 0, z. B. $\alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \alpha_{14} = 0$, so sind hierdurch 4 Ebenen dargestellt, wir nennen sie <u>die 4 Ebenen des Coordinatentetraeders.</u> Setzen wir ferner die 4 Ausdrücke gleichzeitig gleich 1, so finden wir durch Auflösung der Gleichungen die gewöhnlichen Coordinaten des sogenannten „<u>Einheitspunktes</u>" unseres Tetraedercoordinatensystems, d. h. desjenigen Punktes, dessen 4 Coordinaten in diesem System einander gleich sind. Wir fügen sogleich die Bemerkung hieran, daß wir das Verhältnis je zweier der homogenen Coordinaten $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ immer durch ein Doppelverhältnis deuten können, welches sich auf die aus dem Coordinatentetraeder, dem Einheitspunkt und dem Punkte x bestehende Figur bezieht. Dieses Doppelverhältnis können wir dann andererseits als Definition von $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ gelten lassen, insofern es uns darauf ankommt, alles auf Doppelverhältnisse hinauszuspielen.

Wenn wir nun ein zweites Tetraedercoordinatensystem

y_1, y_2, y_3, y_4 annehmen, so werden die Coordinaten desselben gleichfalls durch ein lineares Gleichungssystem mit den x, y, z verbunden sein. Aus ihm und dem früheren System auf pag. 2 können wir dann die x, y, z eliminieren. Wir finden als Resultat:

„Von einem Coordinatentetraeder zum anderen geht man durch homogene lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante über."

Wir fügen noch hinzu:

„Das gewöhnliche Coordinatensystem der x, y, z ist als ein besonderer Fall des Tetraedercoordinatensystems anzusehen, sobald wir nur statt x, y, z $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ schreiben und der Gl. $t = 0$ entsprechend die ∞ weite Ebene als 4te Coordinatenebene gelten lassen."

Wir wollen nun weiter von der Ebene sprechen. Welche Coordinaten werden wir der Ebene erteilen? In den Punktcoordinaten ist die Ebene dargestellt durch die lineare Gleichung: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$. Die Coefficienten dieser Gleichung u_1, u_2, u_3, u_4, d.h. ihre Verhältnisse betrachten wir dann als die „Coordinaten" dieser Ebene.

Wir sind bei dieser Ableitung natürlich sehr einseitig verfahren indem wir den Punkt bevorzugt haben. Man könnte umgekehrt auch von der Ebene und der Bestimmung ihrer Coordinaten ausgehen und durch die Gleichung:

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ die Punkcoordinaten defi= niert denken. Streng logisch verfahrend können wir auch die Coordinaten u und x unabhängig von einander als Doppelverhältnisse einführen; die Gl. $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ giebt also dann die Bedingung für die „vereinigte Lage" von Punkt und Ebene. Wir werden fernerhin diese Gl. abkürzend durch $u_x = 0$ bezeichnen.

Und dann fahren wir fort:

Halten wir in der Gl. $u_x = 0$ die u fest und lassen die x laufen, so haben wir alle Punkte, die in einer festen Ebene liegen und wir sagen: die Ebene wird durch eine Gleichung in Punkcoordinaten dargestellt.

Halten wir umgekehrt die x fest und lassen die u laufen, so haben wir alle Ebenen, die durch einen festen Punkt gehen und wir sagen: dieser Punkt wird durch die Gl. $u_x = 0$ in Ebenencoordinaten dargestellt.

Wir wollen ferner bemerken, dass Ebenencoordinaten und Punkcoordinaten sogenannte *contragrediente Variable* sind: Wenn ich nämlich die Punktcoordinaten durch eine homogene Substitution umändere,

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} + x_3 + \alpha_{14} x_4, \\
\varrho y_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} + x_3 \; \alpha_{24} x_4, \\
\varrho y_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} + x_3 \; \alpha_{34} x_4, \\
\varrho y_4 &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} + x_3 \; \alpha_{44} x_4.
\end{aligned}$$

dann wird jedes System von 4 Grössen, das sich in

derselben Weise substituiert, ein System cogredienter Variabler genannt werden, im Gegensatz hierzu gehen die neuen Ebenencoordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 bei einem solchen Process nicht aus den alten Ebenencoordinaten durch dieselbe Substitution hervor. Man muß die Substitution vielmehr so einrichten, daß:

$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = u_x$ wird:

Die hieraus sich ergebende Abhängigkeit der u und v nennt man die transponierte Substitution, die Variabelen u und v in Bezug auf x und y dagegen „contragrediente Variable." Allgemein werden wir sagen: „Die Contragredienz zwischen Ebenencoordinaten und Punktcoordinaten findet gerade darin ihren Ausdruck, daß bei jeder linearen Substitution der Ausdruck u_x in den entsprechenden Ausdruck v_y übergeht."

Nun noch eine kleine Frage von ganz elementarem Charakter. Wie berechnen wir diejenige Ebene u, die durch die 3 gegebenen Punkte x, y, z geht? Es muß sein:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0;$$
$$u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0;$$
$$u_1 z_1 + u_2 z_2 \quad u_3 z_3 + u_4 z_4 = 0.$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten u unmittelbar als:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} ;$$

d.h. als die Verhältniße der 4 Unterdeterminanten dieser Matrix.

Diesem sehr einfachen Satz wollen wir eine spezielle Bedeutung geben, indem wir interpretieren:

„Die Ebenencoordinaten sind abkürzende Benennungen für die dreigliedrigen Unterdeterminanten aus den Coordinaten dreier Punkte."

In ganz analoger Weise stellt sich diesem Satz der folgende an die Seite, den wir erhalten, wenn wir von Ebenencoordinaten ausgehen:

Die Punktcoordinaten sind abgekürzte Benennungen für die dreigliedrigen Determinanten aus den Ebenencoordinaten dreier Ebenen."

In dieser Formulierung liegt zugleich, dass die Ebene unverändert bleibt, wenn man die 3 Punkte x, y, z durch irgend welche linearen Verbindungen $\lambda x + \mu y + \nu z$ ersetzt. Daß nämlich zunächst jeder solche Punkt $\lambda x + \mu y + \nu z$ in der Ebene u liegt, ergiebt sich direkt aus den 3 Gleichungen der letzten Seite. Denn aus ihnen folgt:

$\lambda u_x + \mu u_y + \nu u_z = 0$ oder anders geschrieben: $u_{\lambda x + \mu y + \nu z} = 0$. Um unsere Behauptung allgemein nachzuweisen, denken wir einmal, wir hätten statt der drei Punkte x, y, z beliebige drei lineare Verbindungen derselben eingeführt.

Dann würde also sein:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 =$$

$$\left|\begin{matrix} \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 z_1 ; & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 + \nu_1 z_1 ; & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 + \nu_1 z_3 ; & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 + \nu_1 z_4 \\ \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2 z_1 ; & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 + \nu_2 z_1 ; & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 + \nu_2 z_3 ; & \lambda_1 x_4 + \mu_2 y_4 + \nu_2 z_4 \\ \lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3 z_1 ; & \lambda_3 x_2 + \mu_3 y_2 + \nu_3 z_1 ; & \lambda_3 x_3 + \mu_3 y_3 + \nu_3 z_3 ; & \lambda_{1\,4} + \mu_3 y_4 + \nu_3 z_4 \end{matrix}\right|$$

„Wir haben nun nachzuweisen, daß man auf dieselben Ebenencoordinaten u wie vorhin kommt, wenn man in dieser Weise statt der 3 Punkte x, y, z irgend 3 mit ihnen linear verknüpfte Punkte einführt." Wir führen den Beweis algebraisch. Fassen wir einmal die erste Determinante obiger Matrix ins Auge, so erkennen wir leicht, daß dieselbe nach dem Determinanten=Multiplications=gesetz gleich dem Produkt:

$$\left|\begin{matrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right| \quad \text{ist.}$$

„In der That erweist sich daher, wenn wir aus der Matrix der Punkte $\lambda x + \mu y + \nu z$ die 4 möglichen Determinanten bilden, jede derselben gleich der entsprechenden Determinante der x, y, z selbst, multipliciert mit der Determinante der λ, μ, ν." q.e.d.

Diese ganze Betrachtung haben wir gegeben, um uns einer neuen Frage zuzuwenden, die speciell

erst in der Raumgeometrie auftritt, für die in der Geometrie der Ebene noch kein Platz ist. Wir werden hier nicht nur Punkte und Ebenen, sondern noch eine Mittelstufe, nämlich gerade Linien einzuführen haben.

Eine gerade Linie, die 2 Punkte verbindet, erscheint als der Träger der Punkte $\lambda x + \mu y$; ebenso ist eine gerade Linie, die als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben ist, allen Ebenen $\lambda u + \mu v$ gemeinsam.

Es ist nun die Frage, was wir als Liniencoordinaten im Raume ansehen wollen. Hier haben wir die Antwort zu geben, die Graßmann (1844) und unabhängig von ihm Plücker (1847) und Cayley (1857) aufgestellt haben. Alle drei kamen auf verschiedenem Wege zu demselben Resultat. Graßmann, dessen Namen ich im vorigen Semester noch nicht genannt habe, der aber zu den hervorragendsten Geometern dieses Jahrhunderts gehört, hat 1844 ein Werk erscheinen lassen „Die Ausdehnungslehre," das 1862 noch einmal in wesentlich umgeänderter Darstellung in 2.ter Auflage verlegt wurde. Graßmann geht bei seiner Darstellung davon aus, daß die Beschränkung unserer Anschauung auf 2 oder 3 Dimensionen für die Begriffsbildung jedenfalls nur etwas Zufälliges ist. Demnach führen wir sogleich n homogene Variable ein,

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, durch die wir „einen Punkt x" in einem mehrfach ausgedehnten Raum festgelegt denken. (NB. Es ist dies natürlich für uns wie für Grassmann nur eine bildliche Sprechweise ohne irgend welche metaphysische Bedeutung.)

Nun fasste Grassmann den Gedanken, in dem mehrfach ausgedehnten Raume sich gerade so eine Geometrie zu construieren, wie es bei der analytischen Geometrie bei 2 und 3 Dimensionen geschieht. Den Inbegriff dieser Sätze bezeichnet er als „Ausdehnungslehre."*) In diesem mehrfach ausgedehnten Raume sieht sich nun Grassmann veranlasst, eine Reihe von Grundgebilden zu betrachten; als solche stellt er die folgenden auf:

1.) den einzelnen Punkt $\lambda' x'$ selber.

2.) dasjenige Gebilde, das sich aus 2 Punkten durch lineare Verbindung erzeugen lässt, das also alle Punkte $\lambda' x' + \lambda'' x''$ trägt. (Demselben entspricht in unserem gewöhnlichen Raume demnach die gerade Linie.)

3.) Dann dasjenige Gebilde, das drei Punkte und ihre linearen Verbindungen enthält:

---

*) Grassmann wollte nicht den Ausdruck: „Hypergeometrie" oder „Geometrie höherer Räume" gebrauchen, und wählte stattdessen diese Bezeichnung „Ausdehnungslehre," die einer Missdeutung weniger ausgesetzt ist.

$\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x'''$ (entspr. der Ebene im gewöhnlichen Raume).

In derselben Weise fortgefahren, ergeben sich die Gebilde, die 4 Punkte, 5 Punkte u.s.w. enthalten sollen, schließlich:

n-1.) dasjenige Gebilde, welches die Punkte trägt: $\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''' + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)} x^{(n-1)}$, wo die λ beliebig zu variieren, die x dagegen konstant sind. Weiter unten, p. 19., wird dieses Gebilde als „Ebene" bezeichnet.

Wollten wir endlich nicht n-1, sondern n Punkte zusammenstellen, so würden wir den Gesammtraum erhalten.

Dies sind also die verschiedenen Stufen von Gebilden, die Graßmann im (n-1) fach ausgedehnten Raume unterscheidet. [<u>Graßmannische Stufen.</u>] Er sieht sich jetzt vor die Frage gestellt: Wie werden die einzelnen Gebilde der ersten, zweiten, dritten u.s.w. Stufe durch Coordinaten zu bestimmen sein? Im speciellen in Rücksicht auf den dreidimensionalen Raum: Wie wollen wir die grade Linie festlegen? — d.h. unsere soeben formulierte Frage. Und hier stellt nun Graßmann folgendes allgemeine Princip auf (auf welches wir durch unsere Bemerkung über den Charakter der Ebenencoordinaten vorbereitet sind):

„<u>Um das einzelne Gebilde der verschiedenen Stufen durch Coordinaten festzulegen (NB. durch homogene</u>

Coordinaten), betrachte man einfach die Determinanten derjenigen Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots\dots\dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots\dots\dots & x_n'' \end{vmatrix}$$, welche sich aus den Coordinaten der erzeugenden Punkte aufbauen läßt."

Wir fügen sogleich hinzu: „Diese Coordinatenwahl von Graßmann erscheint als durchaus zulässig, weil man von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, der bei homogenen Coordinaten nicht in Betracht kommt, genau auf dieselben Coordinaten des Gebildes kommt, wenn man statt der anfänglich gewählten Punkte x', x'' etc. irgend welche aus ihnen durch lineare Verknüpfung hervorgehende Punkte zur Erzeugung des Gebildes zu Grunde legt."

Von den allgemeinen Graßmann'schen Principe machen wir nun Anwendung auf die gerade Linie des (dreidimensionalen) Raumes. Dieselbe ist definiert als das Gebilde, welches die Punkte x, y und $\lambda x + \mu y$ trägt. Wir bilden die Matrix: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$. Dieselbe repräsentiert offenbar 6 Determinanten. Wir wollen zur Abkürzung einführen für $x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta$ die Bezeichnung $p_{\alpha\beta}$: Es folgt, wie leicht ersichtlich, sofort $p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}$. Alsdann lauten die 6 zu unterscheidenden Determinanten:

$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23}$. Wenn wir dann anstatt x und y $\lambda x + \mu y$ wählen und aus der entsprechenden Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 \\ \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 & \lambda_2 x_4 + \mu_2 y_4 \end{vmatrix}.$$

die Determinanten p'_{ik} bilden, so erkennen wir leicht, daß die Beziehung besteht:

$$p'_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \cdot p_{ik}.$$

Wir sehen so den auf der Seite 12 ausgesprochenen allgemeinen Satz hier bestätigt. Diese 6 Größen p_{ik} oder genauer die Verhältnisse derselben wird man nun nach Graßmann als die Liniencoordinaten einführen: $p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23}$.

Was nun historisch die Graßmannsche Ausführung dieser Verhältnisse in seiner „Ausdehnungslehre" anbetrifft, so wollen wir bemerken, daß dieselben in einer eigenartigen und schwer verständlichen Sprache geschrieben ist. Graßmann hat einmal das Bestreben, alle termini technici zu verdeutschen: So spricht er z. B. vom „Spath" statt vom „Parallelepiped" (vergl. Mineralogie), von der „Abschattung" statt „Projektion" u. s. w. Die innere Schwierigkeit liegt ferner darin begründet, daß er wenig Formeln gebraucht, sondern alles vermittelst „Abschattungen" und entsprechender

bildlicher Redeweisen auch bei mehr als drei Dimensionen ausführt. Dazu überall ein eigentümlicher philosophisch-didaktischer Standpunkt. Diesem Umstande ist es denn auch zuzuschreiben, daß das Buch von 1844 zunächst sehr wenig gelesen wurde. Nicht viel besser ist es zuerst der Auflage von 1862 gegangen, bei der Graßmann das formale Element zu sehr in den Vordergrund gestellt hat. Es hat etwa 25 Jahre gedauert, bis man etwas mehr auf die Ideen von Graßmann zu achten begann.

Plücker hat 1847 in seinem „System der Geometrie des Raumes" gleichfalls die Liniencoordinaten bereits erwähnt; doch hat er diese Ideen erst später weiter bearbeitet. Diese Ideen sind weniger allgemein, sondern knüpfen an die concreten Verhältnisse unseres Raumes an. Sie finden sich im Zusammenhange dargelegt in dem 1868-69 veröffentlichten Werke: „Die neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement."

Erst durch diese Arbeit ist die Sache zum allgemeinen Bewußtsein gekommen; man spricht daher gern von „Plückerschen Liniencoordinaten." Plücker hat um die Entwickelung des Coordinatenbegriffs der neueren Geometrie (Ebenencoordinaten, homogene Coordinaten) so große Verdienste, daß man ihm wenig abbricht, wenn

man feststellt, daß hinsichtlich der Einführung der $p_{\alpha\beta}$ Graßmann die Priorität hat. Wer sich für die Einzelheiten dieser Entwickelung interessiert, sei auf die „Gedächtnißrede" auf Plücker hingewiesen, die Clebsch in der hiesigen Societät gehalten hat. [Zum Gedächtnis an Julius Plücker, 1871.].

Betrachten wir nun unsere Liniencoordinaten genauer. Von wie viel Konstanten hängt die gerade Linie im Raume ab? Da die gerade Linie jedesmal durch 2 Punkte, die wir in zwei Coordinatenebenen wählen können, bestimmt ist, so sind demnach 4 von einander unabhängige Größen zur Festlegung der Linie nötig.

Wenn wir homogene Variable haben wollen, so werden wir die gerade Linie durch 5 homogene Variable zu bestimmen haben. Wir haben aber 6 Größen $p_{\alpha\beta}$ zur Festlegung der geraden Linie vor uns. Folglich werden diese 6 Größen nicht von einander unabhängig sein, sondern sie werden einer Bedingungsgleich genügen müßen. Diese Bedingungsgleichung ist vom 2ten Grade in den $p_{\alpha\beta}$. Man erhält sie, indem man sich die 4 gliedrige Determinante bildet, die sich durch Wiederholung der Matrix ergibt. Dieselbe ist sicher gleich 0. Wir haben also:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese 4 gliedrige Determinante kann man unnach zweigliedrigen Unterdeterminanten ordnen, indem man jede Determinante der ersten beiden Zeilen mit der zugehörigen Determinante der letzen beiden Zeilen multipliciert. Man erhält so leicht $(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}) = 0$. Diese Identität bezeichnen wir abkürzend mit $P = 0$. Somit haben wir das Resultat:

„Zwischen den 6 homogenen Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ der Raumgeraden besteht die Identität $P = 0$ vermöge deren die 6 $p_{\alpha\beta}$ auf 5 unabhängige homogene Größen zurückkommen, wie es sein muß, da die Raumgerade von 4 Konstanten abhängt." Deshalb kann des weiteren keine fernere Identität, insbesondere keine lineare Identität zwischen den $p_{\alpha\beta}$ bestehen.

Nun versteht es sich wohl von selbst, daß neben dieser ersten Einführung der Liniencoordinaten sich eine zweite stellt, die sich ergiebt, wenn man von Ebenencoordinaten ausgeht, statt von Punktcoordinaten. Es seien durch u und v zwei Ebenen bezeichnet, die sich in einer Geraden schneiden, es wird dann eine

jede Ebene $\lambda u + \mu v$ durch dieselbe Gerade hindurch gehen. Wir bilden wieder die Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

deren Determinanten wir mit $q_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta - q_{\beta\alpha}$. bezeichnen wollen. Dann ist ganz klar:

<u>„Indem wir mit Ebenencoordinaten beginnen, können wir der geraden Linie in neuer Weise 6 Coordinaten beilegen:</u> $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23}$, <u>zwischen denen die quadratische Relation</u> $q_{12} \cdot q_{34} + q_{13} q_{42} + q_{14} q_{23} = 0$. <u>oder abgekürzt $\Omega = 0$ besteht, während sie übrigens linear unabhängig sind.</u>"

Nun entsteht natürlich die Frage: Wie verhalten sich die 6 Coordinaten p_{ik} zu den 6 Coordinaten q_{ik}? Sind dies etwa vielleicht bis auf die Reihenfolge dieselben Größen? Ehe wir hierauf näher eingehen, wollen wir an folgende Analogie erinnern: Die Punktcoordinaten sind entweder als eingliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten oder als dreigliedrige Determinanten aus Ebenencoordinaten definiert und ebenso können wir die Ebenencoordinaten entweder als eingliedrige Determinanten aus Ebenencoordinaten oder als dreigliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten auffassen.

Beide Male bekommen wir in jedem Falle dieselben Größen. So sind, behaupten wir, die Liniencoordinaten

p und q, die beziehungsweise als zweigliedrige Determinanten der Punkt= resp. der Ebenencoordinaten definiert sind, ebenfalls wieder dieselben Grossen, und zwar bestehen im einzelnen die Beziehungen:

$$\mu \cdot q_{12} = p_{34}\,; \quad \mu \cdot q_{34} = p_{12}\,;$$
$$\mu \cdot q_{13} = p_{42}\,; \quad \mu \cdot q_{42} = p_{13}\,;$$
$$\mu\, q_{14} = p_{23}\,; \quad \mu\, q_{23} = p_{14}\,.$$

Ehe wir diese Behauptung nachweisen, wollen wir vorerst gleich „den allgemeinen Grassmannschen Determinantensatz" aussprechen, von dem unser Satz ein specieller Fall ist.

Durch die lineare Kombination der k Punkte: $x', x'', \ldots\ldots x^{(k)}$ setzen wir uns ein lineares Gebilde zusammen im Raume der n Variabeln, deren Coordinaten die Unterdeterminanten k ter Ordnung $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ der betreffenden Matrix sind. Andererseits können wir uns dieses lineare Gebilde auch durch Ebenen bestimmt denken und zwar durch $n-k$ Ebenen mit den Coordinaten $u', u'', \ldots\ldots u^{(n-k)}$. Aus ihnen bilden wir die Unterdeterminanten $(n-k)$ ter Ordnung, die wir wieder als Coordinaten für das lineare Gebilde wählen. Es ist leicht ersichtlich, dass die Anzahl der p und die Anzahl der q übereinstimmt. (da $u_{(k)} = u_{(n-k)}$).

Beziehen sich nun die p und q auf dasselbe lineare Gebilde, so gilt für dieselben nach Grassmann die Indentität:

$$u \cdot q_{\alpha'\beta'\gamma'} \ldots = \pm\, p_{\alpha\beta\gamma} \ldots$$

(das ± Zeichen ist hinzugesetzt, um die Reihenfolge $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ unentschieden zu lassen), die wir mit den Worten begleiten:

„Wenn ich für dasselbe lineare Gebilde einerseits k gliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten p als Coordinaten berechne, andererseits n – k gliedrige Determinanten q, aus Ebenencoordinaten als Coordinaten berechne, dann sind die p mit den q proportional, so zwar, daß jedem p nach gehöriger Fixierung der Vorzeichen immer dasjenige q entspricht, welches mit ihm zusammen sämmtliche Indices 1, 2, 3 … bis n aufweist."

Diesen allgemeinen Graßmannschen Satz wollen wir nun in dem speciellen Falle der Liniencoordinaten beweisen und zwar in der Weise, dass wir die Bedingung ins Auge fassen, unter der sich 2 gerade Linien schneiden. Diese Bedingung wollen wir nämlich in den p und q auf alle mögliche Weise ausdrücken. Die Vergleichung dieser verschiedenen Ausdrucksweisen wird uns dann gerade liefern, was wir brauchen. Wir können nun auf 4 verschiedene Weisen die betreffende Bedingung in Ansatz bringen:

1. Die beiden geraden Linien seien festgelegt entsprechend durch die Punkte x, y und x′, y′ (v. Figur). Sollen dieselben sich schneiden, so muß sich durch

die 4 Punkte eine Ebene hindurchlegen lassen,

d. h: es muss sein

Fig. 1.)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix} = 0$$

Wenn wir nun diese 4 gliedrige Determinante in derselben Weise, wie es bereits früher geschehen, nach 2 gliedrigen Unterdeterminanten entwickeln, so ergiebt ~~sich~~ folgendes:

$$p_{12}\,p'_{34} + p_{13}\,p'_{42} + p_{14}\,p'_{23} + p_{34}\,p'_{12} + p_{42}\,p'_{13} + p_{23}\,p'_{14} = 0$$

Dies ist die erste Form der Bedingung, für den Schnitt zweier geraden Linien.

2.) Wir können nun genau die dualistische Betrachtung anstellen. Es seien 4 Ebenen u, v und u', v' gegeben, wann schneiden sich die von u mit v und von u' mit v' gebildeten Geraden in einem Punkte? Dann und nur dann, wenn die 4 Ebenen einen Punkt gemeinsam haben. Es muss daher sein:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus ergiebt sich als zweiter Ansatz der verlangten Bedingung:

$$q_{12}\,q'_{34} + q_{13}\,q'_{42} + q_{14}\cdot q'_{23} + q_{34}\,q'_{12} + q_{42}\,q'_{13} + q_{23}\,q'_{14} = 0.$$ *)

Diesen beiden ersten Formeln können wir nun noch zwei weitere entgegenstellen.

3.) Wir erhalten nämlich eine weitere Bedingung für den Schnitt zweier Geraden, indem wir die eine Gerade als Verbindende zweier Punkte x', y', die andere als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben denken. In dem Büschel der beiden Ebenen u_z und v_z, nämlich $u_z + \lambda v_z = 0$ wird sich dann stets eine Ebene finden, die durch den Punkt x hindurchgeht: $u_{x'} + \lambda v_{x'} = 0$ und eine zweite, die durch den Punkt y' hindurchgeht: $u_{y'} + \lambda v_{y'} = 0$. Sollen die beiden geraden Linien sich nun schneiden, so müssen diese Ebenen identisch sein, und so kommt die Bedingung des Schneidens darauf hinaus, daß aus den beiden letzten Gleichungen derselbe Wert des λ sich ergiebt. Es muß daher sein:

$u_{x'} v_{y'} - v_{x'} u_{y'} = 0$ oder ausführlich geschrieben:

$$(u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 + u_4 x'_4)\cdot(v_1 y'_1 + v_2 y'_2 + v_3 y'_3 + v_4 y'_4) -$$
$$(v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + v_3 x'_3 + v_4 x'_4)\cdot(u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + u_3 y'_3 + u_4 y'_4) = 0$$

*) Diese Bedingung können wir abkürzend darstellen durch 1.) $\Sigma\, p'_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0$ resp. 2.) $\Sigma\, q'_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q_{\alpha\beta}} = 0$, wo P und Q die auf pag. 17. eingeführten Ausdrücke 2ten Grades sind.

Nach dem Ausmultiplicieren ergiebt sich beim zweckmäßigen Zusammenfaßen der einzelnen Summanden das einfache Resultat, daß $p'_{\alpha\beta} = x'_\alpha y'_\beta - x'_\beta x'_\alpha$ immer multipliciert mit $q_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha$ vorkommt. In Worten: Es ist jede Determinante aus den x' y' multipliciert mit der entsprechenden Determinante aus den u, v, so daß unsere Bedingungsgleichung lautet:

$$3.)\quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta}\, q_{\alpha\beta} = 0.$$

4.) Diese neue Bedingung des Schneidens zweier Geraden giebt uns sofort, indem wir die geraden Linien entsprechend mit einander vertauschen, als 4te Form der Bedingung:

$$4.)\quad \Sigma\, q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0.$$

Vergleichen wir nun diese beiden Formeln mit denen der vorigen Stunde; wir finden, es muß gleichzeitig sein:

$$1,\quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0. \qquad 3,\quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta} \cdot q_{\alpha\beta} = 0.$$

„Wir schließen hieraus, da in den Formeln 1. und 3. die $p'_{\alpha\beta}$ von Hause aus linear unabhängige Coordinaten bedeuten, während doch 1. und 3. geometrisch für die Linie $p'_{\alpha\beta}$ dieselbe Bedingung aussagen, daß die Coefficienten, mit denen in 1. die $p'_{\alpha\beta}$ multipliciert sind, mit den entsprechenden Coefficienten von 3 proportional sein müßen, so daß wir also schreiben können:

$$\mu \cdot q_{\alpha\beta} = \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}}.$$

Analog folgt aus der Vergleichung der Formeln 2.) und 4.):

$$\varkappa' \cdot p_{\alpha\beta} = \frac{\partial Q}{\partial q_{\alpha\beta}}$$

Diese Beziehungen sagen also aus, dass die Coordinaten q mit den p bis auf die Reihenfolge und einen notwendig unbestimmt bleibenden Proportionalitätsfaktor übereinstimmen.

Jetzt wollen wir etwas näher auf die Plücker'schen Ideen eingehen, die der Raumgeometrie von 1868/69 zu Grunde liegen. Wir können die Betrachtungen, die wir hier meinen, zweckmässig durch einen Hinweis auf analoge Betrachtungen bei der Anwendung von Punktcoordinaten uns näher führen. Wenn wir eine Gleichung zwischen Punktcoordinaten aufstellen, so wissen wir, wird hierdurch eine Fläche, bei 2 Gleichungen eine Curve, bei 3 Gleichungen ein Schnittpunktsystem dargestellt. In gleicher Weise stellt nun Plücker die Frage auf, was wird durch eine, was durch 2, was durch 3, endlich durch 4 Gleichungen zwischen Liniencoordinaten definiert? Mehr als 4 Gleichungen dürfen wir wir natürlich nicht aufstellen, da ja zwischen unseren 6 homogenen Coordinaten immer noch ausserdem die Identitätsgleichung P = 0, resp. Q = 0 zu gelten hat.

Es möge also gegeben sein die eine Gleichung $\Omega = 0$, die homogen in den Liniencoordinaten ist. Was stellt dies Gleichung dar? Ja, es giebt überhaupt ∞^4 gerade Linien, aus diesen greift die eine Gleichung $\Omega = 0$ ∞^3 gerade Linien heraus, die immer noch den Raum vollständig ausfüllen. Eine solche Zusammenfassung nennt Plücker einen Komplex von Linien.

Haben wir die weiteren 2 Gleichungen $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ so bestimmen dieselben eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von geraden Linien, die auch noch den ganzen Raum ausfüllen, denn durch jeden Punkt desselben geht allgemein zu reden immer noch eine (oder auch mehrere) gerade Linien der Mannigfaltigkeit. Wir können sagen, daß die ∞^3 Punkte des Raumes in bestimmter Weise in ∞^2 geraden Linien zusammengefaßt sind. Diesen Inbegriff von Linien nennt Plücker eine Congruenz. [Es ist auch noch der ältere Name „Strahlensystem" üblich; doch ist derselbe wenig passend, da ja auch ein Linienkomplex eigentlich ein „Strahlensystem" abgiebt.].

Nehmen wir nun 3 Gleichungen: $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0$ an, so bestimmen dieselben ∞^1 gerade Linien, welche eine Fläche im Raume, eine sogenannte „Linienfläche" liefern.

Wollte man endlich 4 Gleichungen:

$\Omega=0$, $\Omega'=0$, $\Omega''=0$, $\Omega_0'''=0$ zusammenstellen, so würde dies eine endliche Anzahl [∞^0] gerade Linien geben, eine Zusammenfassung, für die wir keinen besonderen Namen haben.

Nun wollen wir einen Schritt weiter gehen, indem wir in allen Fällen die Gleichung als linear voraussetzen, wir bekommen so „einen linearen Complex, eine lineare Congruenz" u. s. w. fort. Wir müssen nun etwas näher auf diese Gebilde eingehen, wobei wir uns jedoch auf die Hervorhebung einiger Haupteigenschaften derselben beschränken werden, da ein genaueres Eingehen natürlich zuviel Zeit beanspruchen würde.

Es sei also gegeben eine einzelne lineare Gleichung: $\Sigma a_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0$. Bei einem solchen linearen Complex verdient der Ausdruck

$a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}$, den wir abkürzend mit A bezeichnen, besonderes Interesse. Derselbe hat nämlich eine Bedeutung, die vom Coordinatensystem unabhängig ist, mit anderen Worten: er ist eine Invariante des linearen Complexes. Wir beschäftigen uns besonders mit dem speciellen Fall des linearen Complexes, in welchem die Invariante A verschwindet, also die Gleichung besteht:

$a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = 0$ [„Specieller lin. Complex."]

In diesem Falle können wir die $a_{\alpha\beta}$ selbst als Coordinaten einer festen geraden Linie ansehen, indem wir setzen: $a_{\alpha\beta} = q'_{\alpha\beta}$. Denn daß die Invariante $A = 0$ ist, kommt dann auf die Gleichung $Q' = 0$ hinaus, und irgend 6 Größen, die der Gleichung $Q' = 0$ genügen, können wir als Liniencoordinaten q' deuten. Die Gleichung des linearen Complexes geht so über in:

$\Sigma q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0$; dies ist aber die Bedingung, daß die geraden Linien p und q' sich schneiden.

„Hiernach besteht der specielle lineare Complex aus der Gesammtheit aller geraden Linien, welche eine feste Raumgerade $q'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ schneiden."

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle des linearen Complexes über. Setzen wir einmal für $p_{\alpha\beta}$ in die Gleichung desselben ein: $x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta$; so bekommen wir:

$$\Sigma a_{\alpha\beta} (x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta) = 0$$

Wenn wir hier den Punkt x etwa als gegeben denken und nach solchen Punkten y fragen, die diese Gleichung befriedigen, so besagt dies mit anderen Worten:

„Die letzte Gleichung definiert bei festgehaltenem x diejenigen Punkte, die mit x verbunden eine Linie des Complexes bilden."

Bemerken wir nun, daß dies eine lineare Gleichung

für die y ist, die für y = x befriedigt ist, so lesen wir unmittelbar aus unserer Gleichung ab, daß diese Punkte y eine Ebene ausfüllen, welche durch den Punkt x hindurchgeht. Als weitere Folgerung ergiebt sich hieraus die Fundamentaleigenschaft des linearen Complexes:

„Im linearen Complex läuft durch jeden Punkt ein ebenes Strahlbüschel von Complexlinien."

Wir können einen linearen Complex in Rücksicht auf die zuletzt angeführte Gleichung auch noch anders definieren. Setzen wir nämlich fest, daß $-a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ sein soll, woraus von selbst folgt: $a_{\alpha\alpha} = 0$, dann können wir die Gleichung auch schreiben:

$$\sum_1^4 \sum_1^4 a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = 0.$$

„Eine solche Gleichung nennt man überhaupt eine bilineare Gleichung, und ihre linke Seite nennt man eine bilineare Form," und ist im speciellen, wie hier, $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, so nennt man die linke Seite eine schiefe bilineare Form (forme gauche).

Unter Anwendung dieser Redeweise können wir dann sagen:

„Ein linearer Complex im Raume entsteht, wenn man eine schiefe bilineare Form der x und y gleich 0 setzt."

Dieser Satz bezweckte zu zeigen, unter wie ver-

verschiedenen Gesichtspunkten der lineare Complex, eines der wichtigsten Grundgebilde der projektiven Geometrie des Raumes, betrachtet werden kann. Näher hier auf die Gruppierung seiner Linien einzugehen, würde zu weit führen; wir bemerken nur noch, daß, wer sich dafür interessiert, in dem Vorlesungshefte W. $18^{84}/85$ „algebraische Curven und Flächen," gegen Schluß kurz die Elemente der Liniengeometrie behandelt findet.

Gehen wir nun über zur linearen Congruenz; es sei gegeben:

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0; \quad \Sigma\, b_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0.$$

Die diesen beiden Complexen gemeinsamen Linien sind nun natürlich auch dem ganzen Büschel:

$\lambda \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} + \mu \Sigma\, b_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0$ gemeinsam. Nun wollen wir die Invariante A dieses allgemeinen Complexes berechnen. Wir setzen zur Abkürzung:

$a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = A_{11}$ (Invariante des ersten Complexes.)

$a_{12}\, b_{34} + b_{12}\, a_{34} + a_{13}\, b_{42} + b_{13}\, a_{42} + a_{14}\, b_{23} + b_{14}\, a_{23} = 2 A_{12}$

$b_{12}\, b_{34} + b_{13}\, b_{42} + b_{14}\, b_{23} = A_{22}$ (Invariante des zweiten Complexes.)

Es ist dann die Invariante eines beliebigen Complexes der obigen Schaar:

$$A = A_{11}\, \lambda^2 + 2 A_{12}\, \lambda\mu + A_{22}\, \mu^2.$$

Wir fragen nun: Giebt es unter diesen Complexen

der Schaar specielle Complexe mit verschwindender Invariante? Um dies zu beantworten, setzen wir $A=0$ und bekommen eine quadratische Gleichung zwischen λ und μ:

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0$$

In betreff der linken Seite derselben, die eine binäre quadratische Form darstellt, haben wir im vorigen Semester gesehen, daß wir 3 Fälle gemäß des Verhaltens der Determinante der Coefficienten:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$ zu unterscheiden haben.

1. Es sei $D \gtrless 0$.
2. Es sei $D = 0$, jedoch nicht säumtliche Unter-Determinanten $A_{ik} = 0$.
3. Es seien sämmtliche $A_{ik} = 0$.

Da nun jeder Wurzel der Gleichung $A=0$ ein specieller Complex entspricht, so erkennen wir sofort:
Im ersten Falle ($D \gtrless 0$) sind in der Schaar der linearen Complexe 2 specielle enthalten, und die lineare Congruenz besteht aus allen Raumgeraden, welche 2 feste "Leitlinien" treffen." Wir fahren sogleich fort:

„Der zweite Fall ist ein Grenzfall, der aus dem allgemeinen entsteht, indem die beiden Leitlinien

einander unendlich nahe rücken."

Was besagt nun der dritte Fall ($A_{ik} = 0$)? In diesem Falle sind die beiden Complexe: $\Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ und $\Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ selber specielle Complexe; der eine Complex besteht daher aus allen Raumgeraden, die eine feste Gerade schneiden, dasselbe gilt auch für den zweiten Complex. Die Bedingung $A_{12} = 0$ bedeutet dann, daß die beiden festen Geraden sich ihrerseits schneiden. Wir haben so den Satz:

Im dritten Falle, werden wir sagen, haben wir eine sogenannte „zerfallende Congruenz," bestehend 1.) aus allen geraden Linien, die in einer festen Ebene liegen, sowie 2.) aus denjenigen, die durch einen in der Ebene enthaltenen festen Punkt hindurchlaufen."

„Diese Congruenz hat ∞ viele Leitlinien, das ist das ganze Büschel von Linien, die gleichzeitig in der Ebene liegen und durch den Punkt laufen."

Nun haben wir noch einiges zu sagen über die Linienflächen, die drei Complexen angehören:

$$\Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0; \ \Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0; \ \Sigma c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0.$$

Diese 3 Complexe haben ∞^1 gemeinsame Linien, welche aber auch der dreigliedrigen Schaar von Complexen angehören:

$$\lambda \Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \mu \Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \nu \Sigma c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0.$$

Wir berechnen uns wieder die Invariante A für

einen beliebigen Complex dieser Schaar und fragen uns dann, ob wieder specielle Complexe in dieser Schaar enthalten sind. Es ist nun die Invariante:

$A = \lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} + 2\lambda\nu A_{13} + 2\mu\nu A_{23} + \nu^2 A_{33}$.

Dieselbe ist eine ternäre quadratische Form der λ, μ, ν. Die Eintheilung dieser Formen gründet sich, wie wir im vorigen Semester lernten, auf die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Wir wollen in dieser Hinsicht hier bloß auf den allgemeinsten Fall $D \gtrless 0$ eingehen, um nicht zu viel Einzelheiten zu erörtern. In allen Fällen giebt es eine ganze Schaar specieller Complexe, die durch die Gleichung $A = 0$ bestimmt werden.

Hieraus folgt schon:

„Die ∞ vielen Erzeugenden unserer Linienfläche begegnen ∞ vielen festen Leitlinien, welche durch unsere quadratische Gleichung des Näheren festgelegt werden."

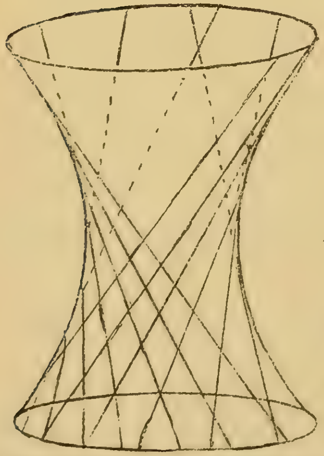
Ist nun insbesondere $D \gtrless 0$, so folgt des weiteren, wie wir hier nicht besonders ausführen.

„Im Falle $D \gtrless 0$ ist unsere Linienfläche eine nicht zerfallende Linienfläche zweiten Grades."

Dieser Satz appellirt freilich gleich an eine gewisse

geometrische Kenntnis. Eine jede Fläche 2ten Grades ist, algebraisch zu reden, eine Linienfläche der hier in Betracht kommenden Art. Aber es giebt nur 2 Flächen 2ten Grades, welche reelle gerade Linien enthalten. Es sind dies: das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Betrachten wir z. B. genauer das einschalige Hyperboloid. Es ist aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt, dass dasselbe zwei Schaaren von geraden Linien*) trägt; eine jede gerade Linie der einen Schaar wird von allen Geraden der zweiten Schaar geschnitten und umgekehrt. Wir erkennen daher:

Fig. 2.



<u>In der That trägt eine Fläche 2ten Grades (einschaliges Hyperboloid) 2 Schaaren geradliniger Erzeugenden, und wenn wir die Linien der einen Schaar als festgegebene Leitlinien betrachten, so können wir die Linien der anderen Schaar definieren als diejenigen Geraden des Raumes, welche den sämmtlichen festen Leitlinien begegnen</u>." [also gemeinsame Transversalen der

---

*) In der Figur stellen sich die beiden Schaaren der geraden Linien dar als Tangenten (Asymptoten) der äusseren hyp. Begrenzung.

sämmtlichen festen Leitlinien sind.]

„Hiernach haben 3 lineare Complexe, deren Determinante D nicht verschwindet, die eine Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids bezw. einer Fläche zweiten Grades gemein.“

Des Näheren stellt sich die Sache so, daß jedesmal ein Hyperboloid resp. hyperbolisches Paraboloid herauskommt, wenn die 3 geg. Complexe reell sind; sind sie aber imaginär (haben sie imaginäre Coefficienten), so kann jede eigentliche Fläche 2. Grades resultieren.

Jetzt wollen wir nachträglich von der linearen Congruenz noch einiges berichten. Wir haben gesehen, daß die Schaar der linearen Congruenzen:

$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} = 0$, solange $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0$ ist.
2 Leitlinien besitzt. Nun können diese Leitlinien aber imaginär sein. Wie ist nun eine solche lineare Congruenz mit 2 konjugiert imaginären Leitlinien gestaltet? („Wir stellen diese Frage besonders deswegen, weil wir in diesem Semester uns viel mit imaginären Linien zu beschäftigen haben werden.) Wir wollen auf diese Frage eine Antwort geben ohne weiteren Beweis. Faßen wir einmal eine ganze Schaar von einschaligen Rotationshyperboloiden ins Auge. Dieselbe werde dargestellt durch die Gleichung:

$\frac{x^2+y^2}{\varrho^2} = z^2 + c^2$, wo c eine gegebene Constante, ϱ ein veränderlicher Parameter ist.*) Wir wollen uns die Meridiane dieser Rotationsfläche, die man erhält, wenn man $y=0$ setzt, zeichnen. Die Nebenaxe der Meridianhyperbel ist hiernach gegeben durch $\pm c$, die Hauptaxe dagegen durch $\pm \varrho c$, wo ϱ beliebig ist. Bestimmt man die Punkte, deren x- und z-Coordinaten $\pm c$ und $\pm \varrho c$ sind, so geben diese die Richtungen der beiden Asymptoten an nach einer bekannten Construktion. (v. Fig. 3.) Wir erhalten so eine ganze Schaar von Hyperbeln, die wir nur um die gemeinsame Z-Axe zu drehen brauchen, um die Rotationshyperboloide unserer Gleichung zu erhalten. (Diese Hyperboloide sind für kleines ϱ schmal und langgestreckt, mit wachsendem ϱ werden dieselben breiter, zugleich aber auch flacher.) Jedes dieser Hyperboloide trägt nun ein System von Erzeugenden der einen und der anderen Art. Betrachten wir die Erzeugenden etwa als Tangenten von Schraubenlinien, deren Axe die Z-Axe ist, so können wir die beiden Arten als die der rechtsgewundenen und die der linksgewundenen unterscheiden, ganz analog wie man die Schraubenlinien unterscheidet.

---

*) Es sind dies Rotationshyperboloide, weil wir für $z=0$ die Gleichung eines Kreises erhalten.

Durch jeden Punkt des Raumes geht nun wenn wir uns für die eine <u>oder</u> die andere Schaar Erzeugenden entschieden, nur eine derselben hindurch, da ja auch nur ein Hyperboloid den Punkt enthält. Wir werden dann sagen:

„<u>Eine lineare Congruenz mit 2 konjugiert imaginären Leitlinien erhält man beispielsweise, wenn man ein System einschaliger koaxialer Rotationshyperboloide betrachtet, welche eine feste Nebenaxe c haben, und nun auf diesen Hyperboloiden die sämmtlichen Erzeugenden erster oder zweiter Art im Auge fasst, d. h. die sämmtlichen Erzeugenden, welche gegen die Rotationsaxe rechts herum oder links herum orientiert sind.</u>"

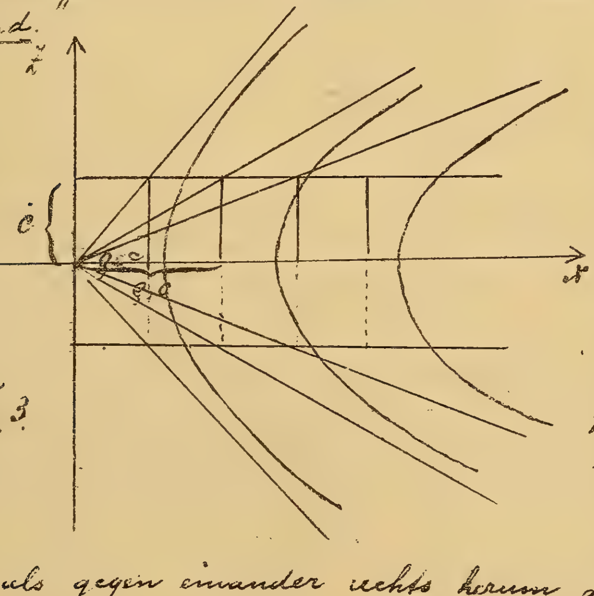


Fig. 3.

Wir können so zur Unterscheidung von rechts und links gewundenen Congruenzen.

Schon bei dem einzelnen Hyperboloid sind die aufeinander folgenden Erzeugenden der einen Art als gegen einander rechts herum gewunden, die auf

einander folgenden Erzeugenden der anderen Art als links herum gewundene zu bezeichnen.

Dies werden wir nun auf lineare Congruenzen übertragen:

„So werden wir überhaupt die linearen Congruenzen mit imaginären Leitlinien einteilen müssen in rechts gewundene und in links gewundene Congruenzen."

Sind nämlich überhaupt einmal irgend 2 auf einander folgende Linien einer solchen Congruenz rechts gegen einander gewunden, so werden es je 2 sein, weil ein Uebergang zu links gewundenen Linien nur durch schneidende Linien hindurch erfolgen könnte, keine 2 Linien einer linearen Congruenz mit imaginären Leitlinien sich aber im Reellen schneiden.

Analytisch aber spiegelt sich dies im folgendem ab:

Wenn unsere Gleichung $A = 0$ imaginäre Wurzeln hat, dann ist für alle reellen λ und μ der Ausdruck $\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22}$ entweder positiv oder negativ, nie $= 0$. Wir sagen, der Ausdruck ist eine definite quadratische Form, und zwar entweder eine positiv oder eine negativ definite quadratische Form.

Die Behauptung ist nun diese:

„ Die Unterscheidung rechts herum und links herum gewundener Congruenzen geht mit der anderen Unterscheidung parallel, ob unsere quadratische binäre Form:

$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22}$, die jedenfalls definit ist, eine positiv oder eine negativ definite Form ist."

Im einzelnen wäre nun die Frage, ob die rechts gewundenen Congruenzen einer positiv definiten oder einer negativ definiten Form entsprechen. Es kommt dies nun ganz auf die gewählte Reihenfolge der Coordinaten an.*); wir schneiden diese Unentschiedenheit ab mit den Worten:

„Wir wollen hinfort annehmen, unser Coordinatensystem sei so gewählt worden, daß den positiv definiten Formen rechtsgewundene, den negativ definiten Formen links gewundene Congruenzen entsprechen."

Wir können diese Verhältnisse hier natürlich nur ohne Beweis anführen. Wir bemerken noch, daß über unendlich nahe laufende Strahlen eine besondere Dissertation geschrieben ist von:

Königs, „sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé."

*) Wir können zweierlei Coordinatentetraeder unterscheiden, je nachdem die Reihenfolge 1,2,3,4 der Coordinatenpunkte eine rechts herum oder links herum geordnete Folge bilden!

Dieselbe findet sich abgedruckt in den Annales de l'école normale supérieure. 1882.

Wir gehen nun zu der Frage der imaginären Raumelemente über, indem wir uns darüber klar werden, was wir unter einem imaginären Punkt, einer imaginären Ebene oder geraden Linie zu denken haben.

Sprechen wir zunächst vom imaginären Punkt. Die Verhältnisse sind hier ganz analog denen, wie wir sie für den imaginären Punkt in der Ebene kennen gelernt haben. Die Coordinaten $x_\alpha = y_\alpha + i z_\alpha$ setzen sich je zusammen aus einem reellen und einem imaginären Teil, die wir für sich als Coordinaten zweier Punkte y und z deuten werden. Der Punkt x liegt dann auf der Verbindungslinie derselben auf derselben Linie liegt auch der Punkt:

$$\bar{x}_\alpha = y_\alpha - i z_\alpha .$$

Dies giebt uns den Satz (vgl. den analogen Satz für die Ebene):

„Jeder imaginäre Punkt liegt mit seinem konjugiert imaginären zusammen auf einer bestimmten reellen geraden Linie des Raumes."

Wir können in Folge dessen ohne Weiteres sagen, wie man nach v. Staudt diese imaginären Punkte reell deuten kann. Man sagt: es giebt eine Involution

zweiter Art auf der Verbindungsgeraden, welche diese beiden Punkte zu Doppelpunkten hat, so daß wir die beiden Punkte geradezu so deuten können: „Eine reelle gerade Linie und auf ihr eine elliptische Involution". Auch wie die beiden so definierten Punkte von einander zu unterscheiden sind, ist im vorigen Semester eingehend erläutert: es geschieht, indem man der reellen geraden Linie, welche die elliptische Involution trägt, noch einen Pfeil beisetzt, um den einzelnen Punkt zu bezeichnen.

Was nun imaginäre Ebenen $u_\alpha = v_\alpha + i\, w_\alpha$ angeht, so sind die Verhältnisse hier den eben besprochenen natürlich ganz analog. Eine imaginäre Ebene $u_\alpha = v_\alpha + i\, w_\alpha$ enthält eine reelle Linie, durch welche auch die konjugiert imaginäre Ebene hindurchgeht, und die reelle Linie trägt ein Ebenenbüschel, indem wir eine elliptische Involution und einen Sinn zur Bezeichnung und Unterscheidung konjugiert imaginärer Ebenen festlegen werden.

Wir werden uns nun den imaginären Linien im Raume zuzuwenden haben. Nehmen wir einmal einen reellen Punkt im Raume an und fragen uns, wie viel imaginäre Linien durch denselben hindurchgehen. Offenbar wird in jeder reellen Ebene, die jenen ausgewählten Punkt enthält, eine zweifach unendliche

Mannigfaltigkeit solcher imaginärer Geraden liegen; also, da ∞^2 reelle Ebenen durch jenen Punkt gehen, wird eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit imaginärer gerader Linien existieren, die jenen Punkt als Träger haben. Da wir ferner dem reellen Punkt dreifach unendlich viele Lagen im Raume geben können, so haben wir den Satz:

„Wir finden im Raume ∞^7 komplexe gerade Linien, welche einem reellen Strahlenbüschel angehören, also ihre konjugierte Gerade schneiden und mit ihr den Mittelpunkt und die Ebene des Strahlenbüschels gemein haben."

Damit haben wir aber unmöglich die Gesammtheit aller imaginären geraden Linien des Raumes erschöpft. Denn eine gerade Linie hängt von 4 Constanten ab, die, da sie je in einen reellen und imaginären Bestandteil gespalten werden können, auf ∞^8 imaginäre gerade Linien schliessen lassen. Wir haben also erst ∞^7 hier nachgewiesen.

„Auf Grund dieser Abzählung zerfallen die imaginären geraden Linien daher in 2 Arten, in die specielle Art, die wir bereits erwähnten, welche einen reellen Punkt und eine reelle Ebene besitzt und in die allgemeine Art, bei der dies nicht der Fall ist, – oder indem wir den Gegensatz anders fassen –

in die specielle Art gerader Linien, die ihre konjugiert imaginären Geraden schneiden und in solche, welche es nicht thun."

Denn es ist klar, daß, wenn zwei konjugiert imaginäre Gerade sich schneiden, der Schnittpunkt, wie die beide verbindende Ebene, nur reell sein kann.

Für die beiden so unterschiedenen Arten imaginärer Linien giebt es keinen allgemein gebräuchlichen Terminus technicus; wir wollen sie fernerhin als die nieder-imaginären und die hoch-imaginären scheiden, indem wir etwa daran denken, daß die imaginären Geraden mit einem reellen Punkt uns fasslicher erscheinen als die anderen.

Wir wollen nun diese zumeist auf Analogieschlüße aufgebauten Betrachtungen analytisch bestätigen.

Es seien die Coordinaten einer imaginären Linie gegeben durch $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta}$.

Wir wollen nun für folgende Ausdrücke, die wir fortgesetzt gebrauchen werden, die hinzugefügten Abkürzungen einführen.

Wir setzen:

$$r_{12}\, r_{34} + r_{13}\, r_{42} + r_{14}\, r_{23} = (r, r).$$

$$s_{12}\, s_{34} + s_{13}\, s_{42} + s_{14}\, s_{23} = (s, s).$$

$$r_{12}\, s_{34} + r_{34}\, s_{12} + r_{13}\, s_{42} + r_{42}\, s_{13} + r_{14}\, s_{23} + r_{23}\, s_{14} = 2(r, s) = 2(s, r).$$

Die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, daß unsere Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ wirklich einer geraden Linie angehören, lautet dann:

$$(p,p) = 0 = (r+is, r+is)$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck nach dem Reellen und Imaginären entwickeln:

$$(r,r) - (s,s) + 2i(r,s) = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in die beiden Bedingungen:

$$(r,r) - (s,s) = 0$$

$$(r,s) = 0$$

„Sollen also die Größen $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + is_{\alpha\beta}$ eine gerade Linie bedeuten, so muß $(r,r) = (s,s)$, und $(r,s) = 0$ sein.

Fragen wir uns nun weiter, wann die so bestimmte gerade Linie $p_{\alpha\beta}$ denn ihre conjugiert imaginäre Gerade $r_{\alpha\beta} - is_{\alpha\beta}$ schneidet? Dazu muß gemäß früherer Auseinandersetzungen:

$$(r+is, r-is) = 0 \text{ sein.}$$

Dies giebt, wenn wir den Ausdruck links entwickeln, die Bedingung:

$$(r,r) + (s,s) = 0.$$

Aus ihr und $(r,r) - (s,s) = 0$ folgt alsdann: $(r,r) = (s,s) = 0$ als Bedingung für das Schneiden zweier konjugiert imaginären Geraden. Wir können daher als analytisches Kriterium aufstellen.

„Die erste Art, die der nieder-imaginären Geraden, ist dadurch charakterisiert, daß $(r,r) = (s,s) = 0$ ist, was aber keineswegs nötig ist. Vielmehr sind bei den hoch-imaginären Geraden diese Ausdrücke $(r,r) = (s,s) \gtrless 0$, d.h. von Null verschieden."

Hieraus resultiert des ferneren eine weitere Einteilung der imaginären geraden Linien zweiter Art in solche, für die $(r,r) = (s,s) > 0$ und in solche, für die $(r,r) = (s,s) < 0$ ist. Worauf die Unterscheidung hinzielt, werden wir gleich sehen.

Wir wollen vorab allgemein auf diejenigen reellen Geraden unser Augenmerk richten, welche unsere imaginären Linien $(r + is)$ schneiden.

Es sei p die reelle bewegliche Gerade, dann muß sein:

$$(r + is, p) = 0$$ oder entwickelt:

$$(rp) + i(sp) = 0$$

Soll nun p eine reelle Gerade sein, so muß einzeln:

$$(rp) = 0$$ und

$$(sp) = 0$$ sein.

Auf dieselben Gleichungen kommen wir natürlich auch, wenn wir von der konjugiert imaginären Geraden $r - is$ ausgegangen wären. Wir haben also den Satz:

„Alle reellen Geraden, die eine von 2 konjugiert imaginären geraden Linien schneiden, schneiden auch die

andere der beiden, und genügen dabei den beiden reellen Gleichungen:

$$(r, \rho) = 0 \text{ und } (s, \rho) = 0."$$

Diese Gleichungen definieren aber 2 lineare Complexe oder eine lineare Congruenz, über die wir letzthin ausführlich gesprochen haben. Wollen wir die Einteilung der linearen Congruenzen, wie wir sie in letzter Vorlesung gegeben haben, hier anwenden, so werden wir zu setzen haben:

$(r, r) = A_{11}$, $(r, s) = A_{12}$, $(s, s) = A_{22}$.

Es ist dann in unserem Falle:

$A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22}$.

Nun werden wir imaginäre Gerade $r \pm is$ erster und zweiter Art unterscheiden.

1.) Im ersten Falle ist ausserdem:

$A_{11} = A_{22} = 0$. Diese Gleichungen führen aber auf eine zerfallende Congruenz. Wir haben daher das Resultat, welches allerdings ganz selbstverständlich ist, sofern man nur darüber nachdenkt:

„Die reellen geraden Linien, welche 2 konjugiert imaginäre gerade Linien der ersten Art schneiden, bilden eine zerfallende Congruenz."

[Strahlenbündel und Geradenfeld.].

2.) Im zweiten Falle ist aber: $A_{11} = A_{22} \gtrless 0$.

Da dann sicher stets $A_{12}^2 - A_{11} A_{22} \gtrless 0$ ist, so

bekommen wir nie den Fall, wo die zwei Directricen unendlich nahe gerückt sind, vielmehr ergiebt sich das Resultat:

„Sind die beiden geraden Linien $r \pm is$ von der zweiten Art, so haben wir eine allgemeine lineare Congruenz mit 2 getrennten Leitlinien, nämlich unseren imaginären Geraden $r \pm is$."

Diese allgemeine lineare Congruenz mit imaginären Leitlinien haben wir aber gerade ausführlicher betrachtet. (Vgl. pag. 36.) In Rücksicht auf die Ausführungen daselbst werden wir jetzt leicht zwischen den imaginären Geraden zweiter Art, für die $(r, r) = (s, s) > 0$ und für die $(r, r) = (s, s) < 0$ ist, scheiden können.

„Die beiden Unterarten $(r\, r) = (s, s) \gtrless 0$ sind nämlich dadurch zu unterscheiden, daß das eine Mal die reellen Transversalen von $r \pm is$ eine rechts gewundene Congruenz bilden, das andere Mal eine links gewundene Congruenz, –

und zwar ist im ersten Falle $(r, r) = (s, s) > 0$, im zweiten $(r, r) = (s, s) < 0$, (gemäß unserer Verabredung über die Reihenfolge der Coordinaten.).

„Dementsprechend wollen wir die imaginären geraden Linien $(r, r) = (s, s) > 0$ selbst als links gewundene gerade Linien bezeichnen und $(r, r) = (s, s) < 0$ selbst als rechts gewundene," (entsprechend dem Fall, daß die Leitlinien der rechts gewundenen Schaar von Erzeugenden eines

einschaligen Hyperboloids selbst links gewunden sind und umgekehrt.)

Wir wollen hier noch ausdrücklich betonen, daß, wenn $r+is$ eine rechts gewundene imaginäre gerade Linie ist, nicht $r-is$ links gewunden ist, sondern vielmehr: bleibt beim Wechsel von $+i$ und $-i$ diese Unterscheidung der hoch= imaginären Geraden in 2 Unterarten ungeändert erhalten.

Wir wollen nun noch eine historische Bemerkung hinzufügen. v. Staudt hat sich in seiner „Geometrie der Lage" die Aufgabe gestellt, auch für die imaginären Geraden im Raume eine reelle Interpretation zu finden.*) „Was die imaginären Geraden erster Art angeht, so interpretiert v. Staudt dieselben selbstverständlich durch ein reelles Strahlbüschel, auf welchem eine elliptische Involution und ein Sinn (ein Pfeil) gegeben ist."

„Um nun auch die imaginären Geraden der zweiten Art zu versinnlichen, denkt sich v. Staudt die Congruenz der reellen Transversalen konstruiert, und des weiteren auf jeder einzelnen dieser Transversalen die elliptische Involution, die zu den beiden Schnittpunkten mit $r \pm is$ zugehört und endlich den Sinn, der zu dem einen dieser beiden Schnittpunkte hinweist."

Hiermit wollen wir unsere Betrachtungen imaginärer

*) v. Staudt ist wohl überhaupt der Erste, der die imaginären Raumgeraden systematisch in Betracht gezogen hat!

geraden und zugleich das Capitel, welches von den Punkten, Ebenen und geraden Linien des Raumes handeln sollte, beenden.

Wir behandeln in einem:

zweiten Capitel:

Die Flächen zweiten Grades.

Diese Betrachtungen werden sich etwas ausgiebig gestalten, da wir von den Flächen zweiten Grades sehr genau Bescheid wissen müssen, um die Cayley'sche Maaßbestimmung des Raumes späterhin voll und ganz zu verstehen.

Wir stellen an die Spitze die Gleichungen:

1, $\Sigma a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = 0$, 2, $\Sigma a_{ab}\, u_a\, u_b = 0$,

von denen die erste <u>die Fläche 2ter Ordnung</u> (in Punktcoordinaten), die zweite <u>die Fläche zweiter Klasse</u> (in Ebenencoordinaten) darstellt. Wir werden weiterhin die Gleichung 1 bevorzugen, doch zunächst beide Gleichungen betrachten.

Wir werden zunächst die Gesichtspunkte ins Auge fassen, die wir als zur

<u>algebraischen Theorie der Flächen 2. Grades</u>

gehörend anzusehen haben. Das Wort „algebraisch" soll ausdrücken, daß wir zunächst gleichgültig sein werden gegen den Unterschied von Reellem und Imaginärem, der uns erst später interessieren wird: wir dürfen uns in dem zunächst Folgenden die Coefficienten a, α unserer Gleichungen selber als complex denken, während sie später als selbstverständlich reell angesehen werden sollen.

Das erste, was wir uns in Bezug auf unsere Flächen zweiten Grades entwerfen, ist eine Theorie der Polarverwandtschaft. Wir ordnen jedem Punkte x eine Polarebene zu in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung, und jeder Ebene u einen Pol in Bezug auf die Fläche 2ter Klasse. Die Polarverwandtschaft ist gegeben, durch:

$$\varrho\, u_\alpha = \Sigma\beta\; a_{\alpha\beta}\, x_\beta \text{ und}$$

$$\sigma\, x_a = \Sigma b\; \alpha_{ab}\, u_b,$$ wo u_α resp. x_a die Polarebene resp. der Pol zu dem gegebenen Punkte x_β resp. der gegebenen Ebene u_b ist. Alles das ist nach den früheren Entwickelungen über ebene Curven 2ten Grades selbstverständlich.

Nun werden wir entsprechend dieser Polarverwandtschaft die Flächen 2ten Grades einteilen und zwar nach der Art der Determinanten aus den $a_{\alpha\beta}$ resp. α_{ab}. Wir setzen also:

$$D = |a_{\alpha\beta}|\,; \quad \Delta = |\alpha_{ab}|.$$

Wir haben dann, was die Ordnungsflächen angeht, folgende Fälle zu unterscheiden:

1, $D \gtrless 0$. ...... Allgemeine Fläche zweiter Ordnung.
2, $D = 0$, jedoch sollen nicht sämmtliche ersten Unterdeterminanten $D_{\alpha\beta} = 0$ sein. .... Kegel.
3, Alle $D_{\alpha\beta} = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. ..... Ebenenpaar.
4, Alle $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, aber nicht alle dritten Unterdeterminanten, d.h. nicht sämmtliche Elemente $a_{\alpha\beta} = 0$. .... Doppelebene.
5, Alle $a_{\alpha\beta} = 0$. ...... Gesammtraum oder Identität.

Entsprechend gliedern sich die Klassenflächen in:

1, $\Delta \gtrless 0$. ...... Allgemeine Fläche zweiter Klasse.
2. $\Delta = 0$, jedoch nicht alle $\Delta_{ab} = 0$. ... Curve 2. Klasse. *)
3. $\Delta_{ab} = 0$, nicht alle $\Delta_{abcd} = 0$. .... Punktepaar.
4, $\Delta_{abcd} = 0$ nicht alle $\alpha_{ab} = 0$. ..... Doppelpunkt.
5, alle $\alpha_{ab} = 0$. .... Identität.

Wir erinnern uns, wie wir im vorigen Semester für die Curven zweiter Klasse die entsprechende Ordnungsgleichung und für die Curve zweiter Ordnung die Klassengleichung aufgestellt hatten. Die analoge Aufgabe wollen wir für die Flächen zweiten Grades behandeln und uns fragen, wie bilden wir die

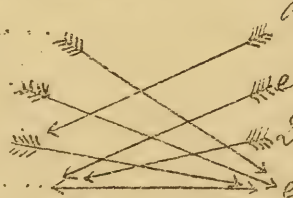
*) d.h. sämmtliche Tangentialebenen, die eine Curve 2. Klasse berühren. Entsprechendes gilt für 3. und 4.

Klassengleichung einer Fläche zweiten Grades aus ihrer Ordnungsgleichung und umgekehrt?
Es ergiebt sich hier für die Verwandlung der Ordnungsflächen folgendes Resultat:

Die allgemeine Fläche zweiter Ordnung geht in die allgemeine Fläche zweiter Klasse über, der Kegel verwandelt sich in einen Doppelpunkt, nämlich die doppelt zählende Spitze des Kegels, das Ebenenpaar dagegen, sowie die Doppelebene und natürlich die Identität selber führen, in Klassengleichungen ausgedrückt, zur Identität.

Analoges gilt für die Verwandlung der Klassengleichungen in Ordnungsflächen, wie folgendes Schema zusammenstellend zeigen möge:

Ordnungsflächen:		Klassenflächen:
1, Allgem. Fläche 2. Ordn.	⟷	Allgem. Fläche 2. Klasse.
2, Kegel.		(Curve 2. Klasse.*)
3, Ebenenpaar. . .		Punktepaar.
4, Doppelebene. .		Doppelpunkt.
5, Identität.		Identität.



Diese Verhältnisse haben wir nun durch analytische Rechnung zu stützen.

*) Die Curve 2. Klasse z. B. liefert in Punktcoordinaten dargestellt eine Doppelebene, nämlich die doppelt gezählte Ebene der Curve selbst.

Um die Gleichung einer Fläche, die in Punktcoordinaten $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ gegeben ist, in Ebenencoordinaten darzustellen, machen wir einen ganz analogen Ansatz wie in der entspr. Aufgabe der Geometrie in der Ebene.

Es ist, wie wir sahen:

1.) $\Sigma^4 a_{\alpha\beta} x_\beta - \varrho u_\alpha = 0$, wo unter u_α die Ebene zu verstehen ist, die zu einem gegebenen Punkte x in Bezug auf die Ordnungsfläche polar ist. Liegt jetzt der Punkt x auf der Fläche, so geht die Polarebene durch ihn hindurch, – denn dieselbe wird die Tangentialebene in diesem Punkte an die Fläche – es ist also:

2.) $\Sigma u_\beta x_\beta = 0$. Die 4 Gleichungen 1.) und die Gleichung 2.) zusammen definieren alsdann eine Tangentialebene u_α. Wenn wir daher aus diesen Gleichungen die x_β und ϱ eliminieren, so werden wir die Bedingung bekommen, unter welcher u_α Tangentialebene unserer Fläche ist. Dieselbe lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese 5 gliedrige Determinante, gleich 0 gesetzt, giebt

alsdann die verlangte Klassengleichung für unsere gegebene Ordnungsfläche. Wir können dieselbe, indem wir nach den $u_a u_b$ entwickeln, auch darstellen durch:

$\Sigma D_{ab} u_a u_b = 0$, d.h. mit dem Produkt $u_a u_b$ ist gerade die erste Unterdeterminante D_{ab} multipliciert.

Da nun für die Fälle 3, 4, 5 der Ordnungsflächen (pag. 50.) sämmtliche $D_{ab} = 0$ sind, so haben wir als Resultat unserer Rechnung jedenfalls dies:

„Indem die Gleichung einer Ordnungsfläche in Ebenencoordinaten $\Sigma D_{ab} u_a u_b = 0$ wird, ergiebt sich ohne weiteres, daß in der That ein Ebenenpaar, eine Doppelebene oder eine identisch verschwindende Gleichung 2ter Ordnung eine identisch verschwindende Klassengleichung ergiebt."

Wir fahren fort, indem wir so sagen:

„Die volle Begründung unseres Schemas ergiebt sich nun, wenn wir die Sätze über adjungierte Determinanten in Betracht ziehen, d.h. die Sätze über diejenigen Determinanten, die sich aus den Unterdeterminanten $D_{\alpha\beta}$ der $a_{\alpha\beta}$ als Elementen bilden lassen."

Natürlich können wir in dieser ganzen Entwickelung die x, a, D beziehungsweise durch die u, α, Δ ersetzen.

Dies alles wollen wir jetzt nun im einzelnen nicht weiter verfolgen; wir beziehen uns auf die Vorlesung des Wintersemesters, in der wir die analogen Betrachtungen angestellt haben. In der That haben wir diese Einzelheiten weiterhin auch kaum nötig.

„Weiterhin nämlich beschäftigen wir uns fast ausschließlich mit allgemeinen Flächen zweiter Ordnung oder Klasse, bei denen ebensowohl jedem Punkte eine bestimmte Polarebene, wie andererseits jeder Ebene ein bestimmter Pol zugeordnet ist."

Wenn also im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, werden wir immer annehmen, daß eine allgemeine F_2 gegeben sei.

Wir wollen jetzt einen Punkt x annehmen, dem wir eine Polarebene u zuordnen durch die Gleichung: $\varrho u_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot x_\beta$, und einen zweiten Punkt y, dem wir die Polarebene v zuordnen durch: $\varrho v_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot y_\beta$.

Dann ist offenbar:

$$\varrho(u_\alpha + \lambda v_\alpha) = \sum_\beta a_{\alpha\beta}(x_\beta + \lambda y_\beta).$$

Die Punkte $x_\alpha + \lambda y_\alpha$ sind nun, wie wir wissen, Punkte auf der Verbindungslinie von x_α und y_α, während die Ebenen $u_\alpha + \lambda v_\alpha$ dem Ebenenbüschel angehören, dessen Träger die Schnittgerade der Ebenen u_α und v_α ist. Wir haben so den Satz:

„Rückt der Pol auf einer geraden Linie fort, so dreht sich die zugehörige Polarebene um eine zweite gerade Linie."

„Man nennt solche 2 gerade Linien im Raume reciproke Polaren, weil umgekehrt, wenn der Pol auf der zweiten geraden Linie sich bewegt, die Polarebene sich um die erste gerade Linie dreht."

Wie werden wir die letzte Behauptung nun beweisen? Drücken wir zunächst überhaupt einmal aus, daß zwei Punkte x und y so liegen, daß der eine Punkt z. B. x auf der Polarebene des anderen y liegt.

Da die Coordinaten der Polarebene von y gegeben sind, durch $\varrho v_\alpha = \Sigma a_{\alpha\beta} y_\beta$, so ist die Gleichung derselben:

$$\Sigma v_\alpha x_\alpha = 0.$$

oder für v_α seinen Wert eingesetzt:

$\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$. Diese Gleichung giebt uns dann die Bedingung, der die Coordinaten des Punktes x_α genügen müßen, damit dieser auf der Polarebene von y_α liegt.

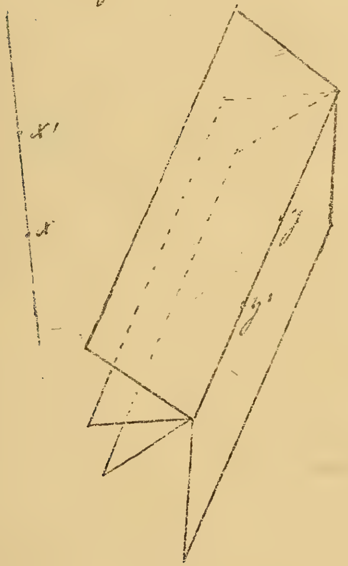
Da aber $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$ in Bezug auf x_α und y_β symmetrisch ist (es ist $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$), so giebt diese Gleichung zugleich die Bedingung, der der Punkt y_α genügen muß, um auf der Polarebene von x_α zu liegen. Wir haben so den für die

Polarenverwandtschaft fundamentalen Satz:

„Liegt y auf der Polarebene von x, so liegt auch x auf der Polarebene von y."

Hieraus ergiebt sich aber sofort unsere Behauptung betr. die reciproken Polaren. Ist nämlich die gerade Linie yy' Schnitt der Polarebenen von x und x', so wird die gerade Linie xx' ebensowohl Schnitt der Polarebenen von yy' sein.

Fig. 4.



Soviel über die algebraische Theorie der Flächen 2ten Grades. Ausführlicher hierauf einzugehen verbietet der Charakter einer Einleitung.

II. Wir werden in einem zweiten Abschnitt unseres Kapitels jetzt von der Einteilung der Flächen 2ten Grades in Rücksicht auf die Realitätsunterschiede sprechen. Doch wollen wir uns auf allgemeine Flächen $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta = 0$ (mit nicht verschwindender Determinante D) beschränken. Ausserdem sollen die

Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ reell sein. Wir wollen solche Flächen schlechthin reelle*) Flächen 2ten Grades nennen, im Unterschied von den imaginären Flächen zweiten Grades, als welche wir die durch Gleichung: $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ mit komplexen Coefficienten dargestellten Flächen bezeichnen.

Das Eigenartige unserer Betrachtung liegt fernerhin darin, daß wir ein Polartetraeder zu Grunde legen wollen. Man gewinnt ein solches leicht folgendermaßen: Zu einem beliebigen Punkte 1, der jedoch nicht auf der gegebenen Fläche selbst liegen soll, suchen wir in Bezug auf dieselbe die Polarebene I, darauf zu einem Punkte 2 dieser Ebene, welcher wieder der Fläche nicht angehört, die Polarebene II, welche natürlich durch den Punkt 1 geht. Auf der Durchschnittskante der Ebenen I und II wählen wir dann einen wieder außerhalb der Fläche gelegenen Punkt 3, dessen Polarebene III infolge dessen durch die Punkte 1 und 2 geht und die Ebenen I und II in einem Punkte 4 schneidet. Die Polarebene IV des Punktes 4 endlich ist durch die Ebene der drei Punkte 1, 2, 3 gegeben.

*) Wir wollen ausdrücklich bemerken, daß hierdurch keineswegs gesagt ist, daß die Flächen überhaupt nur reelle Punkte enthalten.

Die vier Ebenen bilden alsdann ein Polartetraeder, dessen charakteristische Eigenschaft hiernach darin besteht, dass jede Seitenfläche Polarebene der gegenüberliegenden Ecke ist.

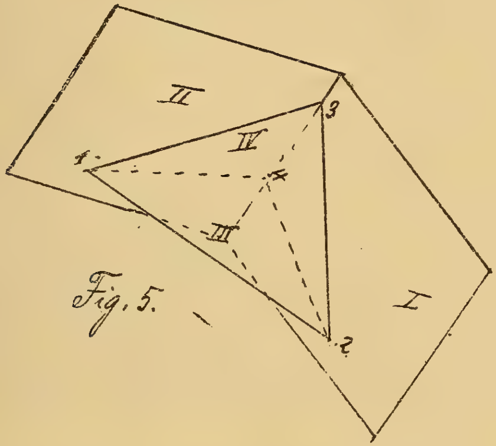


Fig. 5.

Wir wollen einmal abzählen, wie viel willkürliche Constante in unserer Konstruktion eines Polartetraeders enthalten sind. Den Punkt 1 konnten wir ganz beliebig im Raume (mit Ausschluss der Fläche selbst) wählen, dies liefert ∞^3 Möglichkeiten, der Punkt 2 war (mit einer entsprechenden Beschränkung) beliebig auf der Fläche I anzunehmen, was ∞^2 fache Auswahl bedingt, endlich war die Ecke 3 auf der Kante (I II) in ∞^1 fach verschiedener Weise zu wählen möglich: Fassen wir dies zusammen, so folgt:

"Es giebt bei einer gegebenen Fläche 2ten Grades ∞^6 zugehörige Polartetraeder."

Irgend eines dieser Polartetraeder wollen wir nun als Coordinatentetraeder zu Grunde legen. Die Gleichung unserer Fläche nimmt dann (in

analoger Weise wie die Gleichung eines ebenen Kegelschnittes bezogen auf ein Polardreieck, die Form an:

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 = 0$$ d. h.

„Auf ein Polartetraeder bezogen enthält die Gleichung einer Fläche 2ten Grades nur noch die Quadrate der Variabeln." *)

Wir können sofort noch hinzufügen, indem wir uns erinnern, daß wir nach Voraussetzung mit einer reellen F_2 zu thun haben:

„Sofern wir unsere Polartetraeder reell nehmen, wie wir in der Folge ausdrücklich immer voraussetzen werden, so sind die k_1, k_2, k_3, k_4 reelle Größen." Da ferner die Determinante Δ, die wir als $\gtrless 0$ vorausgesetzt haben, gleich:

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4$$

ist, so folgt:

„Von den 4 Größen k wird dabei keine einzige, sofern es sich um eine allgemeine Fläche zweiten Grades handelt, verschwinden."

*) Der Beweis ist analog zu führen, wie bei dem entspr. Falle der Ebene.

Nun ist die Frage, ob wir nicht durch weitere Veränderung des Coordinatensystems die Größen k wegschaffen können, so daß wir nur eine numerische Gleichung vor uns haben?

Wir setzen $\sqrt{k_1}\, x_1 = z_1$; $\sqrt{k_2} \cdot x_2 = z_2$; $\sqrt{k_3} \cdot x_3 = z_3$; $\sqrt{k_4} \cdot x_4 = z_4$.

Hierdurch erhalten wir die Form:

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$. Doch sind obige Substitutionen nur dann reell, wenn die k positiv waren, anderenfalls dagegen imaginär.

„Zieht man daher gegebenenfalls auch imaginäre Substitutionen in Betracht, so kann man von der oben erhaltenen Gleichungsform sofort zu der für alle Fälle geltenden Gleichung übergehen:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0."$$

Da in dieser Gleichung eine specifische Constante nicht mehr vorkommt, so erhalten wir das Resultat:

„Unser letzter Satz zeigt uns, daß irgend 2 allgemeine Flächen zweiten Grades vom allgemeinen algebraischen Standpunkte aus immer durch lineare Substitutionen in einander überführt werden können."

oder prägnanter ausgedrückt:

„Vom algebraischen Standpunkte aus bilden die allgemeinen Flächen zweiten Grades nur eine Art."

Wollen wir uns jedoch nur auf reelle Substitutionen einlaßen, so werden wir bei negativen k die

Substitution $z = \sqrt{-k} \cdot x$ zu machen haben. Wir können dies übersichtlich anschreiben wenn wir etwa $k_\alpha = \pm l_\alpha^2$ setzen.

Dann geht unsere ursprüngliche Gleichung (pag. 61) über in:

$$\pm l_1^2 x_1^2 \pm l_2^2 x_2^2 \pm l_3^2 x_3^2 \pm l_4^2 x_4^2 = 0.$$

Nun setzen wir

$$l_1 x_1 = z_1 \,;\; l_2 x_2 = z_2 \,;\; l_3 x_3 = z_3 \,;\; l_4 x_4 = z_4 .$$

Dies ist sicher eine reelle lineare Substitution.*)

Hierdurch geht unsere Gleichung über in:

$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$. d.h. in Worten:

„Beschränken wir uns auf reelle lineare Substitutionen, so können wir unsere Gleichung: $k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 = 0$ nur auf eine der verschiedenen Gleichungstypen $\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$ bringen und dementsprechend zerfallen, wie nun noch näher auszuführen ist, die allgemeinen Flächen 2ten Grades gegenüber reellen linearen Transformationen in eine bestimmte Anzahl von Unterarten."

Um diese Fälle uns deutlich zu machen, wollen wir die linke Seite unserer Gleichung als solche gesondert betrachten. Es sei also gegeben die

*) Eine einfache Betrachtung der Substitutionen zeigt, daß dieselben das Coordinatentetraeder ungeändert lassen und nur den Einheitspunkt reell transformieren.

quadratische Form von 4 Variabeln $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ mit der Bedingung $D \gtrless 0$. (allgemeine quaternäre quadratische Form.). Von einer solchen quadratischen Form ist es bekannt oder auch: es folgt aus den bislang angestellten Betrachtungen, dass man dieselbe jedenfalls (und zwar noch auf ∞^6 Weisen) durch reelle lineare Transformationen in eine der 5 Typen verwandeln kann:

$$+z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 .$$
$$+z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 .$$
$$+z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 .$$
$$+z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 .$$
$$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 .$$

Nun gilt das sogenannte: „Trägheitsgesetz der quadratischen Formen," das wir hier nur historisch erwähnen wollen, ohne es näher zu begründen.*) Dasselbe besagt, dass es nie möglich ist, einen unserer 5 Typen in einen anderen durch reelle lineare Transformation zu verwandeln.

Dies hat dann die sehr klare Folge, dass hiernach jede gegebene quadratische Form in eine bestimmte der 5 gegebenen Typen hineingehört.

Die erste Form nennt man eine positiv definite Form, die letzte eine negativ definite Form, und

*) Vgl. übrigens die beiden Vorlesungen: Differentialgleichungen der Physik II. Sommer 1889. Lamé'sche Funktionen. Winter 1889–90.

zwar deswegen, weil die erste für alle reellen Werte der z stets positiv, die letzte stets negativ ist. Die drei mittleren Typen nennt man indefinite Formen; sie können für reelle Werte der z jede sowohl positiv wie negativ werden.

Wie stellt sich die Sache nun geometrisch dar?

„Weil geometrisch nicht die Formen selbst, sondern nur die Gleichungen in Betracht kommen, welche durch Nullsetzen der Formen entstehen, so correspondieren, wie leicht zu sehen, den unterschiedenen 5 Typen der Formen dreierlei Gleichungsformen und damit dreierlei Typen von Flächen 2ten Grades."

Diese wollen wir nun im Einzelnen betrachten:

1.) Es sei:

$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$, wo entweder das obere oder das untere Zeichen für alle Glieder zugleich zu wählen ist.

Dieser Gleichung genügen keine reellen Werte der z, außer $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, was hier, wo wir homogene Coordinaten haben, ohne Bedeutung ist. Wir nennen diese Flächen demnach:

nullteilige Flächen 2ten Grades.

„Dieselben werden also durch eine Gleichung zwischen den Quadraten der z dargestellt, in der alle Vorzeichen übereinstimmen."

2.) Es sei:

$$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \mp z_4^2 = 0.$$

Wir wollen diese Flächen als ovale Flächen zweiten Grades bezeichnen.

„Dieselben werden durch eine rein quadratische Gleichung der Z dargestellt, bei welcher ein Vorzeichen von den 3 übrigen abweicht."

3.) Es sei:

$$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \mp z_3^2 \mp z_4^2 = 0$$

Es sind dies die ringförmigen Flächen zweiten Grades.

„Dieselben liegen vor, wenn die + und die − Zeichen in der Gleichung zwischen den Z^2 gleich oft auftreten."

Wenn wir diese Einteilung nun mit jener der gewöhnlichen analytischen Geometrie vergleichen wollen, dann müßen wir uns vor Augen halten, daß für die letztere neben den allgemeinen projektiven Eigenschaften besonders auch die Beziehung der ∞ fernen Ebene zu der Fläche zweiten Grades massgebend ist. Wir wollen daraufhin einmal unsere 3 Fälle einzeln betrachten, indem wir zugleich statt der homogenen Variabeln gewöhnliche anwenden. ($Z_4 = 1$ gesetzt.)

1.) Im ersten Falle haben wir:

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -1.$ Dieser Gleichung kann nicht durch reelle Werte der Z genügt werden, daher nennt die gewöhnliche Geometrie die durch sie dargestellte

Fläche eine „imaginäre Fläche 2ten Grades," eine Bezeichnung, welche in unserem Zusammenhange nicht annehmbar ist, da wir dieselbe bereits in anderer Weise verwandt haben.*) Eine weitere Unterscheidung je nach der Beziehung zur ∞ fernen Ebene tritt hier noch nicht ein.

2.) Was nun die zweite Gleichungsform betrifft, so haben wir folgende drei Flächentypen der gewöhnlichen Geometrie zu nennen, die hierher gehören: (Wir geben ihre Gleichungen in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten an!)

a.) das Ellipsoid:**)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

b.) das zweischalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad \text{und}$$

c.) das elliptische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$$

---

*) Wir nennen eben „eine imaginäre F_2" eine solche, deren Gleichung $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = 0$ imaginäre Coefficienten enthält.

**) Bei den Fällen a und b tritt die Zugehörigkeit zu der zweiten Gleichungsform sofort hervor, da diese Flächen ja bereits auf ein Polartetraeder bezogen sind, was bei c nicht der Fall.

Die nähere Darlegung dieser Gruppierung ist diese:

„Die ovalen Flächen zweiten Grades zerfallen gegenüber der ∞ fernen Ebene in drei Arten, entweder die Ebene trifft überhaupt nicht die Fläche zweiten Grades, dann haben wir das Ellipsoid, oder sie schneidet die Fläche zweiten Grades, dann haben wir das zweischalige Hyperboloid, oder endlich sie berührt die Fläche, dann haben wir das elliptische Paraboloid."

3.) Zu dem dritten Gleichungstypus gehören:

a.) das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{und}$$

b.) das hyperbolische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2z}{c} = 0. \text{ d.h.}$$

„Die ringförmigen Flächen liefern je nach ihrer Stellung zur ∞ fernen Ebene, welche sie entweder in einem eigentlichen oder in einem zerfallenden Kegelschnitte schneiden id est berühren, einschalige Hyperboloide beziehungsweise hyperbolische Paraboloide."

Wir erkennen jetzt leicht den charakteristischen Unterschied der ovalen und der ringförmigen Flächen zweiten Grades. Auf letzteren laufen, wie bekannt, im Gegensatze zu den ersteren 2 Schaaren reeller Geraden, und in Rücksicht hierauf nennt die gewöhnliche Geometrie die Flächen zweiter Art „reelle nicht

geradlinige Flächen," die dritter Art dagegen „reelle geradlinige Flächen." Doch sind diese Benennungen von unserem Standpunkte aus hier nicht beizubehalten. Denn einmal können wir die Bezeichnung „reelle Fläche" nicht gebrauchen aus demselben Grunde, um deß willen wir bei den Flächen erster Art die Bezeichnung „imaginäre Fläche" nicht annehmen konnten; dann aber auch ist der Ausdruck „geradlinig resp. nicht geradlinig" für den hier von uns eingenommenen Standpunkt nicht bezeichnend, weil auf den Flächen 2. Art ebensogut wie auf denen dritter Art gerade Linien liegen, nur sind dieselben dort imaginär. Diese Scheidung in geradlinige und nicht geradlinige Flächen geht daher um so weniger an, als wir eben nun darauf ausgehen wollen in einem dritten Teile unserer Betrachtung der F_2 auf allen unseren Flächen bald reelle bald imaginäre gerade Linien nachzuweisen.

III. Von den geraden Linien auf den reellen Flächen.

Es ist jedenfalls zweckmäßig, mit dem ringförmigen Typus zu beginnen. Wir gehen aus von der Gleichung:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, welche wir umformen in:

$(x_1^2 - x_3^2) + (x_2^2 - x_4^2) = 0$

oder:

$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0$. Wir führen nun ein neues Coordinatensystem ein durch die einfachen Substitutionen:

$$x_1 + x_3 = y_1 \quad ; \quad x_2 + x_4 = y_2 \; ;$$
$$x_1 - x_3 = y_3 \quad ; \quad x_2 - x_4 = y_4 .$$

Dann lautet unsere Gleichung:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Diese Gleichungsform legen wir der weiteren Untersuchung zu Grunde.

Es befriedigt offenbar unsere Gleichung:

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0, \end{cases}$ d. h. die Kante, die die Eckpunkte 3 und 4 unseres Coordinatentetraeders verbindet. Ebenso folgt aus den Gleichungspaaren:

$\begin{cases} y_1 = 0 . \\ y_4 = 0 . \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = 0 . \\ y_3 = 0 . \end{cases}$ $\begin{cases} y_3 = 0 . \\ y_4 = 0 . \end{cases}$, vermöge deren unsere Gleichung auch jedesmal befriedigt ist, daß auch entsp. die Kanten:

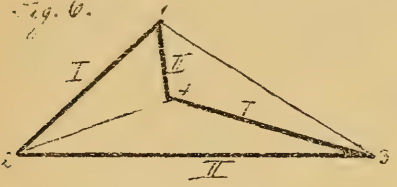
(23), (14), (12) in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegen.

„ <u>Unser Tetraeder gehört daher mit 4 seiner Kanten,</u>

die eine windschiefes Viereck bilden, der Fläche zweiten Grades an,"

und wie ganz klar ist, 2 der Kanten gehören den Erzeugenden der einen Art, 2 der Kanten den Erzeugenden der anderen Art an, da sich ja die Erzeugenden derselben Art nie schneiden. (Wir haben dementsprechend den Kanten der Figur eine I, bez. II beigesetzt.)

Fig. 6.



Wir behaupten nun, daß die beiden noch freien Kanten [$\overline{24}$ und $\overline{13}$] konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche sind. Wie ist dies zu zeigen?

Offenbar sind sämmtliche 4 Ebenen unseres Tetraeders Tangentialebenen unserer Fläche, da jede 2 Erzeugenden derselben enthält. Da nun für eine solche Tangentialebene der Kreuzungspunkt der beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Berührungspunkt und damit der Pol in Bezug auf die Fläche ist, so gilt:

„Die Pole (d.h. die Berührungspunkte) der 4 Ebenen unseres Tetraeders fallen bzw. in die 4 Ecken des Tetraeders hinein. In der That enthält daher beispielsweise $\overline{13}$ die Pole der beiden Ebenen, welche sich längs der Kante $\overline{24}$ schneiden und umgekehrt."

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die Kanten $\overline{13}$ und $\overline{24}$ „konjugierte Polaren" sind.

Wir nemen nun ein Coordinatentetraeder mit den erwähnten Beziehungen ein „Tangentialtetraeder". Es entspricht dasselbe dem Tangentialdreieck in Bezug auf ebene Kegelschnitte. (vgl. die Wintervorlesung.)

Fragen wir uns des ferneren einmal, wie oft wir ein solches Tetraeder bei einer gegebenen Fläche wählen können. Offenbar so oft, wie wir auf dem einschaligen Hyperboloid oder hyperbolischen Paraboloid ein windschiefes Viereck, das unser Tetraeder bedingt, annehmen können. Hieraus folgt sofort:

„Bei gegebenen Flächen zweiten Grades giebt es ∞^4 Tangentialtetraeder, insofern ich die 2 mal 2 beliebig zu wählenden Erzeugenden, die als Kanten des Tetraeders in Betracht kommen, unter den einfach unendlich vielen Erzeugenden ihrer Art jedesmal auf je ∞^2 fach verschiedene Weise herausgreifen kann."

Fragen wir uns aber, wie oft wir die Fläche 2ten Grades in der Form $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ darstellen können, so wird die Antwort etwas anders lauten. Schreiben wir einmal:

$$(\lambda y_1)\left(\frac{y_3}{\lambda}\right) + (\mu y_2)\left(\frac{y_4}{\mu}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$y_1' \cdot y_3' + y_2' \cdot y_4' = 0,$$ so haben wir wieder die frühere Gleichungsform bei demselben Coordinatentetraeder und zwar hängen die neuen

Variabeln mit den alten durch die Gleichungen zusammen:

$$y_1' = \lambda y_1 \quad ; \quad y_2' = \mu y_2 .$$
$$y_3' = \frac{y_3}{\lambda} \quad ; \quad y_4' = \frac{y_4}{\mu} . \text{ d. h.}$$

„In jedem Tangentialtetraeder lassen sich die Coordinaten $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ noch auf 2 fach unendlich viele Weise so definieren, dass die Gleichung $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$ herauskommt,*) daher sich denn die Gleichung Alles in Allem genommen auf ∞^6 Weisen herstellen lässt."

Dies beiläufig. Wir wollen uns jetzt fragen, wie wir am einfachsten die geraden Linien auf der Fläche darstellen können. Unsere Gleichung wird offenbar befriedigt, wenn wir setzen:

$$y_1 = \lambda y_4 \quad ; \quad \lambda y_3 = -y_2 .$$

Bei einem festen Wert von λ stellt die erste Gleichung eine Ebene dar, die durch die Kante $\overline{23}$ hindurchgeht, ebenso die zweite Gleichung eine Ebene, die durch die Kante $\overline{14}$ hindurchgeht. Beide schneiden sich daher in einer Linie, die sowohl die Kante $\overline{23}$ wie $\overline{14}$ trifft. Da nun λ ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

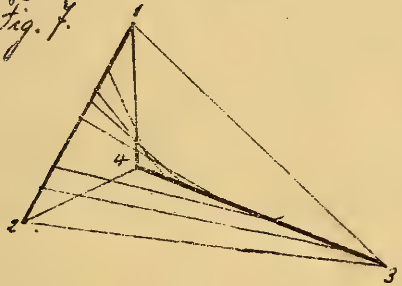
---

*) Es liegt dies wieder an der speciellen Wahl des „Einheitspunktes"

„ Unsere Fläche 2ten Grades trägt eine erste Schaar gerader Linien, welche sich auf die Kanten $\overline{23}$ und $\overline{14}$ stützen und unter λ einen Parameter verstanden durch folgende Gleichungspaare dargestellt sind:

$$y_1 = \lambda y_4 .$$
$$\lambda y_3 = - y_2 .$$

Fig. 7.



Unsere Gleichung $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ wird aber auch befriedigt durch das Gleichungspaar:

$$y_1 = \mu y_2$$
$$\mu y_3 = - y_4 .$$

„ Unsere Fläche trägt daher noch eine zweite Schaar von geraden Linien, welche sich auf die Kanten $\overline{12}$ und $\overline{34}$ stützen und unter μ einen Parameter verstanden durch die Gleichungen:

$$y_1 = \mu y_2$$
$$\mu y_3 = - y_4 .$$ dargestellt sind.

Diesen beiden Schaaren gehören in der That diejenigen Kanten unseres Tetraeders an, die wir vorhin mit I bez. II bezeichneten.

Hier tritt nun gleich hervor, welche Stellung die Flächen zweiten Grades in der synthetischen

Geometrie einnehmen.

Es stellt offenbar:

$$y_1 = \mu y_2 \quad \text{und ebenso}$$
$$\mu y_3 = -y_4 \qquad \text{bei variablem } \mu$$

ein Ebenenbüschel dar; diese beiden Ebenenbüschel sind aber projektiv zu einander, wenn wir die gleichen Werten μ entsprechenden Ebenen einander zuordnen. Der Schnitt, den je zwei solche Ebenen gemein haben, ist eine gerade Linie, die wie bereits gesagt, ganz der vorliegenden Fläche 2ten Grades angehört. v. Staudt bezeichnet nun die beiden Schaaren der geraden Linien, die auf diese Weise entstehen, als Regelschaaren.

Wir haben daher das Resultat, welches die Stellung der ringförmigen Flächen zweiten Grades im System der synthetischen Geometrie definiert:

„Unsere ringförmige Fläche 2ten Grades ist Trägerin zweier Regelschaaren, und jede dieser Regelschaaren erscheint als der geometrische Ort der Schnittlinien zweier projektiven Ebenenbüschel."

[Vgl. das Kapitel der Wintervorlesung: „Die projektive Erzeugung der ebenen Gebilde zweiten Grades."]

Wir werden uns nun aber in der synthetischen Geometrie nicht auf reelle projektive Ebenenbüschel

zu beschränken brauchen.

„Wenn daher hiernach in der synthetischen Geometrie die ringförmigen Flächen zweiten Grades vermöge der genannten Erzeugungsweise vor allen anderen bevorzugt erscheinen, so bedarf es nur einer Ersetzung der reellen Elemente durch komplexe Elemente, um in entsprechender Weise alle beliebigen Flächen 2ten Grades zu erzeugen." —

Jetzt wollen wir geradezu die Liniencoordinaten unserer geraden Linien berechnen.

Die einzelne Erzeugende der zweiten Schaar z. B. ist der Schnitt der beiden Ebenen:

$$\begin{cases} y_1 - \mu y_2 = 0. \\ \mu y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Wir haben nun einfach die Matrix der Coefficienten zu bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \end{vmatrix}$$ und aus ihr die Unterdeterminanten.

Diese geben uns sofort die Liniencoordinaten q der Erzeugenden der zweiten Schaar als:

$q_{12} = 0; \quad q_{13} = \mu; \quad q_{14} = 1.$

$q_{34} = 0; \quad q_{42} = \mu; \quad q_{23} = -\mu^2.$

Nun fragen wir uns: Wenn μ imaginär wird,

uns haben diese Linien dann für eine Eigenschaft, sind sie nieder imaginär oder hoch imaginär und, wenn letzteres der Fall ist, sind sie rechts gewundene oder links gewundene?

Wir setzen also:

$\mu = a + bi$, wo $b \gtrless 0$, und spalten die Linien=coordinaten in $r + is$. Dann ist:

$$r_{12} = 0;\ r_{13} = a;\ r_{14} = 1.$$
$$r_{34} = 0;\ r_{42} = a;\ r_{23} = -a^2 + b^2.$$

$$s_{12} = 0;\ s_{13} = b;\ s_{14} = 0$$
$$s_{34} = 0;\ s_{42} = b;\ s_{23} = -2ab.$$

Nun bilden wir uns die Ausdrücke: (r,r) und (s,s)

Wir finden:

$$(r,r) = (s,s) = +b^2 > 0.$$

Dies besagt nach unseren früheren Auseinander=setzungen:

„Diejenigen Linien der zweiten Erzeugung, welche imaginär sind, sind hiernach hoch imaginär und zwar links gewunden."

„Entsprechend sind dann die imaginären Linien der ersten Erzeugung unserer Fläche ebenfalls hoch imaginär und rechts gewunden."*)

---

*) Diese Sätze stimmen damit überein, daß die auf einander folgenden reellen Linien der einen Art oder der anderen Art gegen einander in dem einen, bez. dem anderen Sinne gewunden sind (die der ersten Art rechts herum, die der zweiten Art links herum.)

„Hiernach tragen also die ringförmigen Flächen zweiten Grades neben den reellen Erzeugenden nur hoch imaginäre gerade Linien."

In der That, da durch jeden reellen Punkt der F_2 zwei reelle Gerade hindurchlaufen, wie könnten auf der F_2 imaginäre Gerade mit reellem Punkte existieren.

Wir werden jetzt weiter die beiden Schaaren der geraden Linien auf den ovalen und den nullteiligen Flächen zweiten Grades nachzuweisen haben.

Wir beginnen mit den nullteiligen Flächen. Hier können wir sogleich 2 Sätze behaupten. Da die nullteilige Fläche ja keinen reellen Punkt besitzt, so werden weder reelle noch nieder imaginäre gerade Linien auf derselben liegen, d.h. positiv ausgedrückt: „Alle geraden Linien der nullteiligen Fläche sind hochimaginäre."

Hieran knüpft sich weiter der Satz, daß eine Schaar der Erzeugenden aus rechts gewundenen, die andere aus links gewundenen hoch imaginären Linien besteht. Denn da die Erzeugenden derselben Schaar doch eine continuierliche Mannigfaltigkeit bilden, so wird es nicht angehen, daß Linien derselben Schaar zum Teil einen rechtsgewundenen, zum Teil einen links gewundenen Sinn zeigen; es müßten denn

Linien vorhanden sein, welche den Uebergang bilden, d.h. wieder imaginäre Geraden. Andererseits aber können die Erzeugenden der beiden Schaaren nicht beide zugleich rechts gewunden oder beide links gewunden sein. Wir würden sonst zwei Arten von nullteiligen Flächen zu unterscheiden haben, je nach dem Sinn ihrer geradlinigen Erzeugenden, während doch unsere Flächen reellen Projektivitäten gegenüber durchaus ohne Unterschied sind.

Die sind allgemeine Gründe, deren Stichhaltigkeit man nicht gut bezweifeln kann, doch wird man gern eine analytische Verification wünschen. Vorerst wollen wir noch einen andern Punkt anführen: Da 2 konjugiert imaginäre Linien der hier in Betracht kommenden Art immer gleichzeitig entweder links oder rechts gewunden sind, so ergiebt sich sofort der Satz:

„Jede der beiden Schaaren von Erzeugenden ist sich selbst konjugiert imaginär."

Wir gehen nun zur analytischen Verification der vorhin ausgesprochenen Sätze über: Die Gleichung der nullteiligen Fläche war auf die Gestalt gebracht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \qquad \text{oder:}$$

$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + ix_4)(x_2 - ix_4) = 0$, wofür wir schreiben:

$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$

Hierdurch haben wir ein Tangentialtetraeder als Coordinatentetraeder zu Grunde gelegt, allerdings hat dasselbe imaginäre Ebenen und Ecken. Reell ist nur die Kante, längs der sich die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ schneiden und die gegenüberliegende Kante, längs welcher sich die Ebenen $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ schneiden, so daß wir auch sagen können:

„<u>Reell sind von dem Tangentialtetraeder nur diejenigen beiden Kanten, welche conjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche 2ten Grades sind.</u>"

Dies Auftreten imaginärer Elemente in dem Tangentialtetraeder hindert jedoch durchaus nicht, die beiden Schaaren der geraden Linien in derselben Weise wie in voriger Vorlesung zu bilden als:

Erste Art: $\begin{cases} y_1 = \lambda y_4 . \\ \lambda y_3 = -y_2 . \end{cases}$ Zweite Art: $\begin{cases} y_1 = \mu y_2 . \\ \mu y_3 = -y_4 . \end{cases}$

Da y_1 und y_4 bereits imaginär sind, so hat es keinen Zweck, sich auch nur vorübergehend auf reelle Werte von λ und μ zu beschränken, wir setzen vielmehr gleich:

$$\lambda = a + ib$$

$$\mu = c + id.$$ und gehen außerdem zu dem Coordinatensystem der x zurück. Wir erhalten alsdann für die Erzeugenden der ersten Art

die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - ix_4). \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4. \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a+ib)x_2 + ix_3 + i(a+ib)x_4 = 0 \\ (a+ib)x_1 + x_2 - i(a+ib)x_3 + ix_4 = 0. \end{cases}$$

Hiernach werden wir die Coordinaten q_{ik} unserer geraden Linien bekommen, wenn wir die Determinanten der folgenden Matrix aus den Coefficienten bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+ib) & i & i(a+bi) \\ a+bi & 1 & -i(a+ib) & i \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$q_{12} = 1 + (a^2 - b^2) + 2iab. \quad q_{13} = +2b - 2ai.$$
$$q_{34} = -1 - a^2 + b^2 - 2iab. \quad q_{42} = -2b + 2ai.$$
$$q_{14} = 2ab + i(1 - a^2 + b^2).$$
$$q_{23} = -2ab - i(1 - a^2 + b^2).$$

oder, wenn wir die Coordinaten in ihren reellen und imaginären Bestandteil spalten:

$$r_{12} = 1 + a^2 - b^2. \quad r_{13} = 2b. \quad r_{14} = 2ab.$$
$$r_{34} = -(1 + a^2 - b^2). \quad r_{42} = -2b. \quad r_{23} = -2ab.$$

und:

$$s_{12} = 2ab. \quad s_{13} = -2a. \quad s_{14} = 1 - a^2 + b^2.$$
$$s_{34} = -2ab. \quad s_{42} = +2a. \quad s_{23} = -(1 - a^2 + b^2).$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wie es ja

auch sein muß,

$(r,r)=(s,s)$ ist, und zwar wird:

$(r,r)=(s,s)=-1-2a^2-2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4.$

Da der Ausdruck links nun stets negativ ist, so erkennen wir die Richtigkeit unseres auf pag. 7[illegible] angeführten Satzes für die Erzeugenden der ersten Art.

Führen wir die Entwicklung analog für die Erzeugenden zweiter Art durch, so werden wir für diese finden:

$(r,r)=(s,s)=1+2c^2+2d^2+c^2+2c^2d^2+d^4$, wo dann der Ausdruck links stets positiv ist.

Wir haben daher den Satz:

„ <u>Die Erzeugenden der ersten Art sind rechts gewunden, die Erzeugenden der zweiten Art sind links gewunden. (gemäß unserer Verabredung über die Reihenfolge der Coordinaten.)</u>"

Wir wollen nun unsere Formeln benutzen, um eine neue Frage aufzuwerfen.

Es seien durch:

$\lambda = a + ib$

$\lambda' = a' + ib'$ die Parameter bezeichnet, die zu zwei <u>konjugiert imaginären</u> Erzeugenden gehören. Es ist die Frage, <u>wie hängen λ und λ' zusammen?</u>

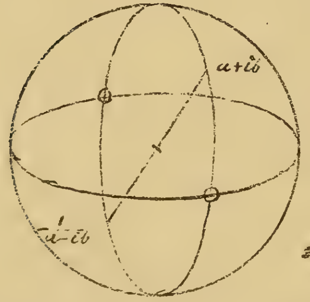
Eine ähnliche Frage haben wir im vorigen Winter

bei der Betrachtung der Kegelschnitte beantwortet.

Wir hatten daselbst geschieden zwischen einteiligen und nullteiligen Kegelschnitten und in Betreff derselben folgenden Satz aufgestellt:

„Konjugiert imaginäre Punkte eines einteiligen Kegelschnittes bekommen konjugiert imaginäre Parameterwerte λ. Konjugiert imaginäre Punkte eines nullteiligen Kegelschnittes bekommen diametral imaginäre Parameterwerte λ". [v. Wintervorlesung.]. Unter diametral imaginären Werten λλ' hatten wir dabei folgendes verstanden. Wenn wir die Grösse a + ib in gewöhnlicher Weise auf der Kugel deuten, dann gehört zu dem Punkte a + ib ein diametral gegenüberliegender Punkt.

Fig 8.



Ist $a+ib=\varrho(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)$, so ist dieser zweite Punkt

$$=-\frac{1}{\varrho}(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)$$

oder, wenn wir Zähler und Nenner mit $\cos.\varphi-i\sin.\varphi$ multiplicieren:

$$=\frac{-1}{\varrho(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)}=\frac{-1}{a-ib}.$$

„Diesen Wert $\frac{-1}{a-ib}$ bezeichneten wir dementsprechend als diametrale Grösse zu a + ib"

Wir werden die Analogie des Satzes über die Kegelschnitte

mit der uns vorliegenden Frage betreffs der konjugiert imaginären Erzeugenden jetzt leicht erkennen. Es gelten ja, wie gezeigt, z. B. bei den Erzeugenden der ersten Art die Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - ix_4). \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4. \end{cases}$$

Setzen wir, um die konjugiert imaginären Gerade zu erhalten, hierin für i ein $-i$ so kommt:

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a-ib)(x_2 + ix_4). \\ (a-ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 + ix_4. \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = \frac{-1}{a-ib} \cdot (x_2 - ix_4). \\ \frac{-1}{a-ib} \cdot (x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4. \end{cases}$$

Wir erkennen, daß diese Gleichungen der konjugiert imaginären Geraden gleichfalls den ersten Typus tragen, nur ist statt $a+ib$ die diametrale Größe $\frac{-1}{a-ib}$ gesetzt. Dies besagt:

"<u>Auf der nullteiligen Fläche haben konjugiert imaginäre Erzeugende diametrale Parameters</u>"

Dagegen haben, wie wir ergänzend bemerken können, auf den <u>ringförmigen</u> Flächen konjugiert imaginäre Erzeugende <u>konjugierte</u> Parameter.

Wir gehen jetzt zu den ovalen Flächen 2ten Grades über, welche die Gleichungsform haben: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, mag man sich hierunter eine Kugel, ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid denken.

Reelle Erzeugende werden auch hier nicht auftreten können; da wir jedoch ∞^2 reelle Punkte auf einer solchen Fläche haben, so werden wir ∞^2 nieder imaginäre Erzeugende bekommen, und zwar werden je zwei konjugiert imaginäre Erzeugende dieser Art demselben reellen Punkt der Fläche zugehören und sich also auf die beiden Schaaren von Erzeugenden verteilen. Wir behaupten noch mehr:

„Mit diesen so gefundenen nieder imaginären Geraden haben wir die sämmtlichen Erzeugenden der ovalen Flächen 2ten Grades erschöpft. Es giebt bei ihnen keine hochimaginären Geraden."

Dies wäre wieder in gewohnter Weise analytisch nachzuweisen:

Wir schreiben die Gleichung der Fläche:

$$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0. \text{ oder}$$

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

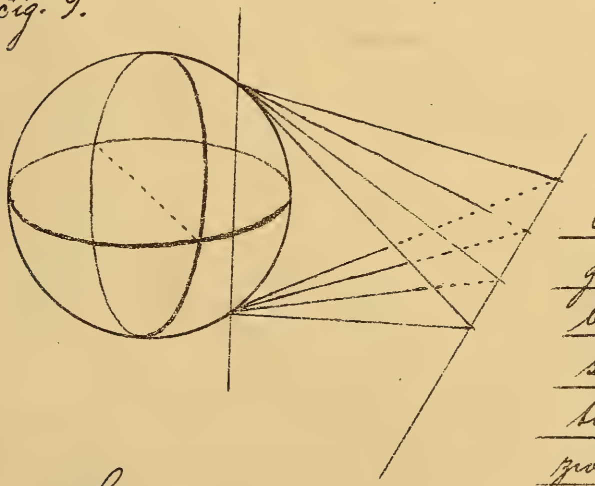
In dem so zu Grunde gelegten Tangentialtetraeder findet sich zunächst die reelle Kante $x_1 = 0, x_3 = 0$ als Schnitt der Ebenen $y_1 = 0, y_3 = 0$; innen ist die

gegenüberliegende Kante der Schnitt zweier reeller Seitenebenen: $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ oder $x_2' \pm x_4' = 0$. Hieraus folgt, daß auch die beiden Eckpunkte, in welchen die erste Kante diese Ebenen durchsetzt, reell sind.

„Unser Tetraeder hat daher wieder 2 reelle Kanten, welche konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche sind. Die eine schneidet die Fläche in 2 reellen Punkten, von der anderen gehen an die Fläche 2 reelle Tangentialebenen."

Hieraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion für ein solches Tangentialtetraeder bei einer ovalen Fläche, als welche wir in der Figur der Einfachheit wegen eine Kugel wählen wollen:

Fig. 9.



„Wir erhalten dasselbe, indem wir irgend zwei reelle Punkte der Fläche durch eine gerade Linie verbinden, und andererseits deren Tangentialebenen in einer zweiten geraden Linie zum Schnitt bringen, endlich das windschiefe Vierseit

<u>der imaginären Geraden hinzufügen, welche auf der Fläche von den beiden reellen Punkten auslaufen oder in den beiden reellen Ebenen liegen."</u>

Wir wollen jetzt zur Darstellung der geraden Linien auf den ovalen Flächen schreiten.

Die Erzeugenden erster Art sind gegeben durch:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda y_4 \\ \lambda y_3 = -y_2 \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - x_4). \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - x_4. \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a+ib)\,x_2 + ix_3 + (a+ib)\,x_4 = 0. \\ (a+ib)\,x_1 + x_2 - i(a+ib)\,x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

so daß die Coefficienten-Matrix für die Bestimmung der $q_{\alpha\beta}$ die Gestalt hat:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+ib) & i & +(a+ib) \\ a+ib & 1 & -i(a+ib) & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich:

$$q_{12} = 1 + a^2 - b^2 + 2abi.\quad q_{13} = 2b - 2ai.\quad q_{14} = 1 - a^2 + b^2 - 2abi;$$

$$q_{34} = i(1 + a^2 - b^2) - 2ab.\quad q_{42} = 2a + 2bi.\quad q_{23} = -2ab + i(-1 + a^2 - b^2).$$

Spalten wir die $q_{\alpha\beta}$ wieder in den reellen und imaginären Teil, so kommt:

$$r_{12} = 1 + a^2 - b^2.\quad r_{13} = 2b.\quad r_{14} = 1 - a^2 + b^2;$$

$$r_{34} = -2ab.\quad r_{42} = 2a.\quad r_{23} = -2ab.$$

woraus folgt:

$$(r,r) = -2ab - 2a^3b + 2ab^3$$
$$+ 4ab + 2a^3b - 2ab^3$$
$$- 2ab \qquad = 0. \text{ d. h.}$$

<u>„Alle geraden Linien sind niederimaginär.“</u>

Die konjugiert imaginäre Gerade zu der betrachteten wird des weiteren gegeben durch

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a-ib)(x_2 - x_4). \\ (a-ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 - x_4. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen auch in der Form geschrieben werden können:

$$x + ix_3 = -\frac{1}{a-ib}(x_2 + x_4). \qquad \text{d. h.} \quad y_1 = \mu \cdot y_2.$$
$$\frac{-1}{a-ib} \cdot (x_1 - ix_3) = -(x_2 - x_4) \qquad \mu \cdot y_3 = -y_4.$$

so ergiebt sich der Satz:

<u>„Die konjugiert imaginäre Linie einer Erzeugenden der einen Art gehört der anderen Art an und wird für den diametralen Parameterwert erhalten.“</u>

Ein besonderes Interesse bieten nun diese Sätze wegen ihrer Beziehung zur Funktionentheorie.

Wir sind gewohnt, die komplexe Größe $a + ib$ auf der Kugel zu deuten, indem wir jedem Punkte derselben einen Wert $a + ib$ zuordnen und umgekehrt.

Wir behaupten jedoch weiter:

<u>Wenn man in der Funktionentheorie den reellen</u>

Punkten einer Kugel komplexe Werte a+ib beilegt, so sind dies gerade die Parameterwerte, welche die auf der Kugel verlaufenden Erzeugenden der einen Art, deren jede ja einem reellen Punkte eindeutig zugeordnet ist, im Sinne der hier vorliegenden Entwickelungen unter Zugrundelegung eines geeigneten Tangentialtetraeders besitzen."

Dies ergiebt sich sofort, wenn wir die Gleichung der Kugel: $x_2 + y_2 + z^2 - 1 = 0$, indem wir zu einem Tangentialtetraeders übergehen, schreiben als:

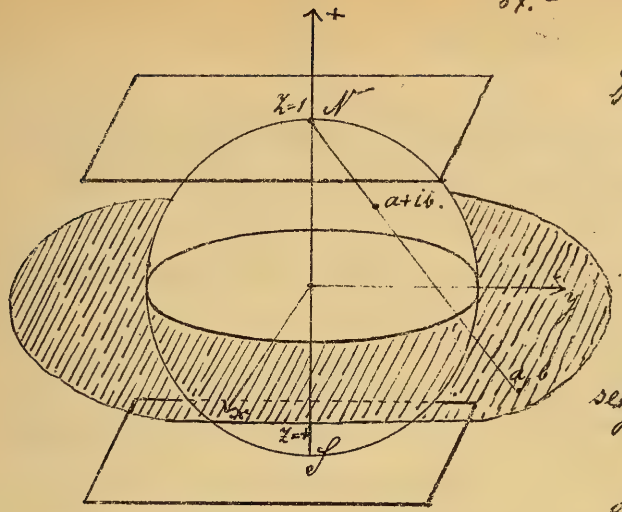
$$(x+iy)(x-iy)-(1+z)(1-z)=0$$

Wir erkennen leicht: Der oberste und der unterste Punkt der Kugel, der Nord- und Süd-Pol, sind die beiden reellen Ecken, die Tangentialebenen in diesen Punkten die reellen Seitenflächen des Tangentialtetraeders, der Schnitt der letzteren, d.h. die ∞ weite Gerade der Aequatorebene ist die zweite reelle Kante des Tetraeders.

Wir projicieren nun bekanntlich vom Punkte $z=1$ aus die Punkte der Aequatorebene mit den Coordinaten a, b auf die Kugel und geben den Bildpunkten alsdann die Bezeichnung a+ib. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten des Bildpunktes mit x, y, z, so wird:

$$x : y : 1-z = a : b : 1, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$a+ib = \frac{x+iy}{1-z}.$$



Diese Formel giebt also an, wie sich das $a+ib$ des Kugel=punktes aus dessen rechtwinkligen Coor=dinaten zusammen=setzt.

Wie aber setzt sich der Parameter $a+ib$ für die geradlinigen Erzeugenden der einen Art aus den Coordinaten der zugehörigen Kugelpunkte zusammen?

Die Erzeugenden der ersten Art sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{cases} x + iy = \lambda(1-z), \\ \lambda\cdot(x-iy) = 1+z, \end{cases}$$

aus deren erster folgt:

$$\lambda = \frac{x+iy}{1-z}.$$

Dies ist aber genau die obige Formel für $a+ib$. Hiermit ist die in Aussicht gestellte Uebereinstimmung erwiesen.

Diese Uebereinstimmung unserer projektiven Betrachtungen mit dem geometrischen Ansatz der Funktionentheorie ist offenbar mehr als eine zufällige. Wir haben als tieferen Grund dafür, daß man (in der Funktionentheorie) $a+ib$ so schön auf der Kugel interpretieren kann, diesen anzusehen, daß die Punkte der Kugel ein=eindeutig bezogen werden können auf

die Curven einer rationalen Curvenschaar, nämlich der Schaar der erzeugenden Geraden, deren Individuen sich durch einen Wert des Parameters festlegen lassen. Andererseits sehen wir, dass wir eine Interpretation von a + ib auf der Kugel noch auf ∞ viele andere Weise einführen können als es gewöhnlich geschieht, indem wir nicht von dem rechtwinkligen Coordinatensystem x y z, sondern von irgend einem Polar=tetraeder ausgehen, das zur Kugel gehört."

„Ueberdies können wir endlich sogar statt der Kugel zur Deutung von a + ib ebenso gut irgend eine andere ovale Fläche zweiten Grades zu Grunde legen."

In diesen Sätzen liegt die funktionentheoretische Bedeutung begründet, welche unsere Betrachtungen über Nicht=Euklidische Geometrie (Cayley's Maass=bestimmung) später gewinnen sollen.

„Wir wollen jetzt nur noch eine Bemerkung über die Einführung von a + ib in der Ebene machen. Auch diese können wir so deuten, dass sie mit unserem bisherigen Gedankengang übereinstimmt."

Durch jeden Punkt in der Ebene geht doch ein ganzes Büschel von geraden Linien hindurch, mag der Punkt selbst reell oder imaginär sein.

Wir setzen denselben jetzt imaginär voraus, und schreiben das Büschel:

$p + \lambda . q = 0$; wo $\lambda = a + ib$ ist.

Für jeden Wert von λ erhalten wir dann im allgemeinen eine imaginäre gerade Linie, welche als solche nur einen reellen Punkt trägt.

Es giebt hierbei nur einen Ausnahmefall, unter den Geraden $p + \lambda q = 0$ giebt es eine reelle Linie, nämlich die Linie, welche den imaginären Punkt mit seinem conjugiert imaginären verbindet. Wir können annehmen, dass diese reelle Gerade durch $q = 0$ gegeben werde; ihr entspricht daher der Wert $\lambda = \infty$!

„Offenbar haben wir so die Möglichkeit, in der Ebene eine Deutung von $a + ib$ zu konstruieren, der Art, dass wir alle geraden Linien $p + \lambda q = 0$ eines Büschels zu Grunde legen, welches von einem imaginären Punkt ausstrahlt, und nun jedem reellen Punkte der Ebene das λ derjenigen Büschelgeraden zuordnen, die durch ihn hindurchgeht. Dann wird auch jedem λ nur ein Punkt der Ebene hinzugehören, bis auf den einen ausgezeichneten Wert von λ, sagen wir $\lambda = \infty$, welcher der geraden Linie zugehört, die den imaginären Mittelpunkt des Büschels mit dem konjugiert imaginären Punkte verbindet. Diesem Werte von λ gehören alle reellen Punkte der genannten Linie an."

Wir behaupten nun, daß diese Deutung der imaginären Werte $a + ib$ in der Ebene die gewöhnliche Deutung des $a + ib$ einschließt, und zwar:

„ergiebt sich die gewöhnliche Darstellung von $a + ib$ in der Ebene, wenn wir als imaginären Büschelmittelpunkt den einen Kreispunkt zu Grunde legen, wobei die reelle Verbindungslinie mit dem konjugiert imaginären Punkte die unendlich weite Gerade der Ebene wird."

Um dies zu beweisen, stellen wir die Gleichung des Büschels, das den einen Kreispunkt als Träger hat, wirklich auf: $x + iy = \lambda$. (oder homogen geschrieben $x + iy = \lambda t$.) Wir fragen uns nun, welches ist der reelle Punkt, welcher für $\lambda = a + bi$ auf der Büschelgeraden $x + iy = a + bi$ liegt. Offenbar wird derselbe gegeben durch

$$x = a$$
$$y = b.$$

Dieser Punkt bekommt alsdann die Marke $a + bi$, und wir erkennen hierin sofort die elementare Regel. Wenn aber $\lambda = \infty$ wird, so wird $x + iy = \infty$, d. h. $t = 0$. Dies ist der Ausnahmefall, welcher hier die ∞ weite Gerade ergiebt. Jedem unendlich weiten Punkte der Ebene erteilen wir also die Marke $\lambda = \infty$; dies ist dasselbe, was man wohl mit den Worten ausspricht:

„In der Funktionentheorie hat die Ebene nicht eine ∞ weite Gerade, sondern nur einen unendlich weiten Punkt $\lambda = \infty$."

Man erkennt, worauf diese Betrachtungen abzielen.

„Es wird überhaupt eine Aufgabe dieser Vorlesung sein, die geometrischen Konstruktionen und Sätze, welche man sonst in der Funktionentheorie auf elementare Weise begründet, auf die Grundsätze der projektiven Geometrie zu stützen, womit von selbst sich eine größere Geschmeidigkeit und Allgemeinheit dieser Konstruktionen und Sätze ergeben wird."

Wir wollen jetzt in einem *vierten Kapitel* von den *Collineationen des Raumes* reden.

Wir stellen uns zuvörderst wieder auf den allgemeinen algebraischen Standpunkt. Wir sagen alsdann: zwei Räume sind kollinear, wenn zwischen ihren Punktcoordinaten die Beziehungen bestehen:

$$\varrho y_\alpha = \Sigma_\beta c_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}, \text{ für } \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Man fügt zudem meist die Bedingung hinzu, daß die Determinante der Coefficienten $|c_{\alpha\beta}| \gtrless 0$ ist,

d. h. die Bedingung, welche angiebt, dass die angeführten Beziehungen sich auch umkehren lassen. Doch ist es oft auch von Interesse, die Fälle verschwindender Determinante zu behandeln. Man vergleiche in dieser Hinsicht die Vorlesung 1881/82 über „projektive Geometrie," in der als Ausgangspunkt ein solcher Fall gewählt ist. Es handelte sich dort darum, den ganzen Raum auf eine Ebene zu beziehen. [nach Art der „malerischen Perspektive."]

Collineation nennt man die aufgestellte Beziehung, weil jeder geraden Linie des Raumes x eine Gerade des Raumes y entspricht.

Wir haben ferner bereits im vorigen Winter gelernt, dass diese geometrische Eigenschaft umgekehrt charakteristisch ist für die analytische Beziehung, mit der wir es hier zu thun haben.

„Die Collineation ist das geometrische Gegenbild der linearen Substitution."

Wir betrachten weiter die speziellere Aufgabe, die sich ergiebt, wenn wir x und y in demselben Raume deuten. Es drängt sich dann nämlich sofort die Frage auf, ob es nicht Punkte giebt, die sich selbst entsprechen. Solche Punkte werden offenbar durch unsere Gleichung gegeben, wenn wir y_α mit x_α vertauschen. Wir haben alsdann:

$\varrho \cdot x_\alpha = \Sigma_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta$, für $\alpha = 1, 2, 3, 4$ oder ausführlich geschrieben:

$$0 = (c_{11} - \varrho) x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4.$$
$$0 = c_{21} x_1 + (c_{22} - \varrho) x_2 + c_{23} x_3 + c_{24} x_4.$$
$$0 = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + (c_{33} - \varrho) x_3 + c_{34} x_4.$$
$$0 = c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 + (c_{44} - \varrho) x_4.$$

Durch Elimination der x_1, x_2, x_3, x_4 bekommen wir für ϱ die sogenannte „charakteristische" Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \varrho & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Die nähere Untersuchung der festbleibenden Punkte hängt alsdann von den Specialfällen dieser Gleichung ab, und es giebt in dieser Hinsicht eine erschöpfende Theorie, die Elementartheiler-theorie von Weierstraß. [1868. Berliner Monatsberichte. „Zur Theorie der bilinearen Formen.]. Dieselbe, die sich überhaupt auf die Classification von Determinanten folgender Art bezieht:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - d_{11}\varrho. & c_{12} - d_{12}\varrho & \cdots\cdots & c_{1n} - d_{1n}\varrho. \\ c_{21} - d_{21}\varrho. & c_{22} - d_{22}\varrho & \cdots\cdots & c_{2n} - d_{2n}\varrho. \\ \vdots & & & \\ c_{n1} - d_{n1}\varrho. & c_{n2} - d_{n2}\varrho & \cdots\cdots & c_{nn} - d_{nn}\varrho. \end{vmatrix},$$

findet bei den verschiedensten algebraischen Fragen ihre Anwendung, so im vorigen Winter in den Laméschen Funktionen, als es sich um das gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen 2ten Grades handelte, so jetzt, wo es sich um die festbleibenden Punkte einer Collineation handelt."

Die specielle Frage der Collineation ist im Sinne der Elementarteilertheorie von Segre, einem jungen italienischen Geometer, behandelt in Bd. 19. der „Memorie dei Licei 3. ser. 1884." unter dem Titel „Classificazione delle omografie," und zwar für den Fall von n homogenen Variabeln. Wir geben dies Citat um so lieber, zumal wir nicht eingehend diesen Betrachtungen uns werden hingeben können.

„Die Elementarteilertheorie hat es nämlich mit der Frage zu thun, ob gegebenenfalls unsere charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat, und wie sich in einem solchen Falle für einen vielfachen Wurzelwert die Unterdeterminanten verhalten."

Von all den Möglichkeiten, die sich in dieser Hinsicht bei $n = 4$ ergeben, wollen wir nur 3 anführen:

1.) Die charakteristische Gleichung möge 4 getrennte

Wurzeln $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4$ besitzen: im diesem allgemeinen Falle wird jedem Wurzelwerte ϱ ein bestimmter festbleibender Punkt entsprechen.

„Im allgemeinen" bleiben daher bei einer Collineation 4 getrennte Punkte fest."

2.) Es seien 3 Wurzeln $\varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \varrho_4$ einander gleich, die vierte Wurzel ϱ_1 von ihnen verschieden. Außerdem wollen wir voraussetzen, daß für den Wert $\varrho = \varrho_2$ auch alle 2ten Unterdeterminanten, [und damit natürlich auch die ersten Unterdeterminanten] verschwinden sollen, (was keineswegs stets der Fall zu sein braucht.). Für $\varrho = \varrho_1$ sind alsdann die 4 Gleichungen $\varrho x_\alpha = \Sigma c_{\alpha\beta} x_\beta$ schlechtweg mit einander verträglich, d. h. eine ist eine Folge der übrigen, dagegen für $\varrho = \varrho_2$ sind 3 derselben überflüssig, wir behalten nur eine Gleichung zur Bestimmung der x übrig.

„Die geometrische Deutung ist, daß $\varrho = \varrho_1$ entsprechend ein einzelner Punkt A des Raumes fest bleibt, für die dreifache Wurzel $\varrho = \varrho_2$ aber eine ganze Ebene E von Punkten festbleibt."

Fig. 11

Zieht man durch den Punkt A eine beliebige Gerade, so erkennt man, daß auch diese

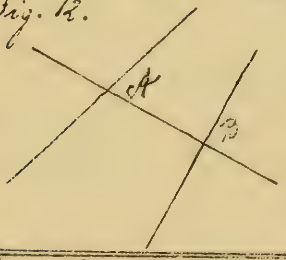
als solche festbleibt, doch so, daß auf ihr die einzelnen Punkte eine Verschiebung erleiden können, (ausgenommen die Punkte A und B.).

Diese Art der Collineation giebt dann geometrisch den Fall der sogenannten Centralprojektion*), indem alle Punkte auf geraden Linien verrückt werden, welche durch ein festes Centrum laufen, so zwar, daß die Punkte einer gewissen festen Ebene, der Hauptebene der Perspektive, auch noch sämmtlich ungeändert bleiben."

3.) Es sei jetzt $\varrho_1 = \varrho_2$ und $\varrho_3 = \varrho_4$. Außerdem wollen wir annehmen, daß für jede dieser Doppelwurzeln alle ersten Unterdeterminanten in $|c_{\alpha\beta}|$ gleich 0 sind, d.h. daß jedesmal von den 4 Gleichungen nur 2 in Betracht kommen.

"Dann bekommen wir für jede der beiden Doppelwurzeln eine aus festbleibenden Punkten bestehende gerade Linie als Schnitt der durch die beiden Gleichungen dargestellten Ebenen."

Fig. 12.



Ziehen wir eine beliebige, diese in ihren einzelnen Punkten festen Geraden schneidende, dritte Gerade, so wird diese als solche festbleiben, da ihre Schnittpunkte

*) auch wohl gewöhnliche Reliefperspektive genannt.

A und B, „die Stützpunkte," absolut fest sind, wohl aber im übrigen eine Verschiebung ihrer Punkte erleiden können.

Geometrisch bedeutet diese Collineation daher eine sogenannte windschiefe Perspektive, bei welcher der Bildpunkt eines beliebigen Punktes mit dem gegebenen Punkte immer auf einer 2 feste Gerade treffenden geraden Linie liegt."

Sprechen wir jetzt von den Collineationen, die eine Fläche 2ten Grades in sich selber überführen.

Es sei gegeben die allgemeine Fläche 2ten Grades: $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$. Die Frage, durch wie viel Collineationen diese Fläche in sich selber übergeführt werden kann, erledigt sich leicht durch eine einfache Abzählung. Es giebt allgemein ∞^{15} Collineationen im Raume von 3 Dimensionen. Denn in den eine Collineation bestimmenden Gleichungen haben wir 16 Constante, deren Verhältnisse jedoch nur wesentlich sind.

Flächen 2ten Grades giebt es aber nur ∞^9. Da nun durch jede Collineation aus einer Fläche 2ten Grades wieder eine solche entsteht, auch jede Fläche, wie wir früher sahen, in jede andere

durch Collineation übergehen kann, so können wir sofort schliessen, dass dieser Abzählung zufolge jede allgemeine Fläche 2ten Grades durch $\frac{\infty^{15}}{\infty^{9}} = \infty^{6}$ fach verschiedene Collineationen in sich übergeführt wird.

Dies können wir noch auf eine andere Weise bestätigen. Wir wissen, dass wir auf 6 fach ∞ viele Weise eine gegebne Fläche 2ten Grades auf ein Polartetraeder mit der Gleichung $\Sigma x^2 = 0$ beziehen können. Jede Collineation nun, die das zu Grunde gelegte Polartetraeder in ein anderes (zu dem dieselbe Gleichungsform gehört) überführt, wird auch die gegebene Fläche in sich überführen. Jenes ist aber auf ∞^6 fache Weise möglich.

Diese sechsfach unendlich vielen Collineationen zerfallen jedoch in zwei Arten, in 6 fach ∞ viele Collineationen der ersten Art und in 6 fach ∞ viele Collineationen der zweiten Art.

Folgendermaßen:

„Die erste Schaar von Transformationen führt das einzelne erzeugende System der Fläche 2ten Grades in sich selbst über, die zweite Art von Transformationen vertauscht die beiden Systeme von Erzeugenden mit einander."

Man unterscheidet diese beiden Arten von

Collineationen auch wohl als die eigentliche und die uneigentliche Transformation. Hiernach bilden alsdann die eigentlichen Transformationen eine Gruppe, die uneigentlichen nicht, d.h. 2 eigentliche Transformationen nach einander angewandt geben wieder eine eigentliche Transformation, nicht aber 2 uneigentliche. Dies aber ist gerade mit der Bezeichnung „Gruppe" gemeint.

Nun wollen wir gleich einen Ausblick auf die Nicht-Euklidische Geometrie werfen. Dort werden wir in Cayley'scher Weise eine Fläche 2ten Grades zu Grunde legen. „Die eigentlichen Transformationen werden dann die Bewegungen des Nicht-Euklidischen Raumes sein, die uneigentlichen dagegen werden solche sein, die die Raumfiguren in ihre Spiegelbilder *) überführen."

Die beiden Arten der Collineationen wollen wir jedoch noch etwas näher betrachten.

1.) Die eigentliche Collineation. Wir werden hier eine fundamentale Schlussweise anwenden, die wir auch im vorigen Semester bereits benutzten, als es sich darum handelte, einen Kegelschnitt in sich selbst überzuführen. Die Erzeugenden der

*) Eine Raumfigur ist mit ihrem Spiegelbilde nicht kongruent, da rechts und links bei beiden Figuren vertauscht ist.

beiden Arten seien entsprechend durch die Parameterwerte λ und μ festgelegt. Bei der eigentlichen Collineation geht jede Erzeugende λ in eine Erzeugende λ' [der ersten Art], und eine Erzeugende μ in eine Erzeugende μ' [der zweiten Art] über. Wie hängt nun λ' mit λ und μ' mit μ zusammen? Sie hängen zunächst sicher algebraisch zusammen; denn die Punktcoordinaten erfahren eine algebraische Transformation, und die λ und μ sind andererseits algebraische Funktionen der x. Aber sie hängen auch eindeutig zusammen; denn aus jeder Erzeugenden λ wird nur eine Erzeugende λ' und entspr. aus jedem μ nur eine μ' und umgekehrt. Die einzige eindeutige und eindeutig umkehrbare algebraische Funktion einer Variabeln ist aber die gebrochene Funktion ersten Grades mit nicht verschwindender Determinante. Es folgt daher:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \text{ und } \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}, \text{ wobei}$$

noch $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$ und $ad - bc \gtrless 0$ ist.

„Jede eigentliche Collineation bewirkt demnach eine Verschiebung der Erzeugenden der Fläche über die Fläche hin, welche durch Formeln der folgenden Art gegeben ist:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d},$$

wo $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$ *) und $ad - bc \gtrless 0$.

In den Formeln kommen je drei wesentliche Constante **) vor; wir haben aber ∞^6 Collineationen, unsere 2.3 Constante sind daher keiner Bedingungsgleichung unterworfen. Da wir im algebraischen Gebiete uns bewegen, so wird auch in der That jedes Wertesystem von Coefficienten unter Berücksichtigung der angeführten Bedingungen möglich sein.

„Umgekehrt wird daher auch jede lineare Substitution von λ: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$, wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$ ist, verbunden mit einer linearen Substitution von μ: $\mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}$, wobei $ad - bc \gtrless 0$ ist, eine eigentliche Collineation der Fläche zweiten Grades in sich nach sich ziehen."

Wir können nun auch homogen schreiben:

*) Es entspricht dies unserer Annahme, die lineare Substitution der x mit verschwindender Determinante ausschließt.

**) Denn nur das Verhältnis der 4 Coefficienten ist massgebend. Wir wollen übrigens bemerken, daß wir die Mannigfaltigkeit einer complexen Variabeln eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit nennen.

$$\varrho \cdot \lambda_1' = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \qquad \text{und} \qquad \sigma \cdot \mu_1' = a \mu_1 + b \mu_2$$
$$\varrho \cdot \lambda_2' = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 \qquad\qquad \sigma \cdot \mu_2' = c \mu_1 + d \mu_2$$

Die quaternären linearen Substitutionen der bezeichneten Art erscheinen so in 2 Arten binärer linearer Substitutionen gespalten.

In betreff dieser binären linearen Substitution wollen wir nun wieder die Frage aufwerfen: Giebt es festbleibende Elemente? Die Antwort hängt offenbar von den Determinanten ab:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} a - \sigma & b \\ c & d - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$ welche nach

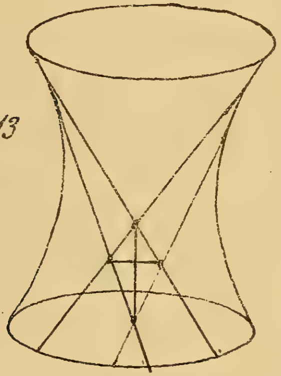
Weierstraß zu classificieren sein werden. Wir wollen hier nur 2 Fälle zur Sprache bringen.

1.) Die Determinanten mögen je 2 getrennte Wurzeln haben: ϱ_1 und ϱ_2 — σ_1 und σ_2. Dies besagt, daß je zwei Erzeugende der einen und der anderen Art festbleiben. Diese 4 Erzeugenden bilden ein windschiefes Vierseit, dessen Ecken alsdann gleichfalls festbleiben. [In der Figur ist als F_2 ein einschaliges Hyberboloid gewählt.] Es ist dies der „allgemeine“ Fall. Verbindet man die gegenüberliegenden Ecken des Vierseits mit einander, so erkennt man leicht:

„Im allgemeinen Falle, wenn unsere beiden

binären Substitutionen jede 2 festbleibende Elemente liefert, ist das räumliche Tetraeder, welches bei der betreffenden Collineation festbleiben muss, dasjenige Tangentialtetraeder unserer Fläche 2ten Grades, welches durch dieses Vierseit festgelegt ist."

Fig 13



2.) Nun wollen wir noch einen sehr einfachen speciellen Fall betrachten. Es sei: $\mu' = \mu$, d. h.: die Erzeugenden der zweiten Art werden gar nicht geändert,*) so daß nur die Erzeugenden der ersten Art auf der Fläche verschoben werden. Wir wollen eine solche Operation eine Schiebung erster Art nennen, entsprechendes gilt für die Schiebung zweiter Art, dies ist diejenige Operation, bei der nur μ substituiert wird, λ dagegen festbleibt.

Wir erkennen sofort:

„Jede eigentliche Collineation der Flächen 2ten Grades in sich kann als die Aufeinanderfolge zweier solcher Schiebungen angesehen werden."

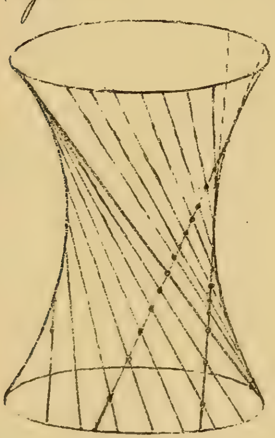
---

*) cf. pag. 104.

Was stellt nun eine solche Schiebung für eine Raumtransformation vor?

„Bei einer Schiebung erster Art z. B. bleiben nicht nur alle Erzeugenden zweiter Art fest, sondern auch 2 Erzeugende der ersten Art, die wir als getrennt denken wollen, und es ist dann klar, daß alle einzelnen Punkte dieser beiden Erzeugenden

Fig. 14



festbleiben müßen, woraus dann weiter folgt, daß unsere Raumcollineation eine windschiefe Perspektive ist, welche die genannten 2 Erzeugenden zu Leitlinien hat."

Analoges gilt auch von den Schiebungen zweiter Art. Dort sind zwei Erzeugende zweiter Art mit ihren säumtlich Punkten fest und Leitlinien einer windschiefen Perspektive.

Wir schließen weiter:

„Umgekehrt wird auch jede windschiefe Perspektive, deren Leitlinien einer Fläche 2ten Grades angehören,

*) Die Determinante $\begin{vmatrix} a\sigma & b \\ c & d-\sigma \end{vmatrix}$ hat dann die Doppelwurzel $\sigma = 1$, für welche alle 2-gliedrigen Unterdeterminanten derselben verschwinden.

eine Schiebung für diese Fläche 2ten Grades vorstellen, d. h. die Fläche wird in sich übergehen, indem sich nur die Linien der einen Erzeugenden unter einander vertauschen, alle Linien der anderen Erzeugung aber erhalten bleiben, d. h. sich in sich selbst verschieben."

Wir gehen nun über zu den

2.) uneigentlichen Transformationen. Wir wollen hier nur 2 Thatsachen angeben:

„Jede uneigentliche Collineation schreibt sich in den λ und μ:

$$\lambda' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d} \; ; \quad \mu' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \text{ wo wieder}$$

$ad - bc \gtrless 0$. und umgekehrt bedeutet jede solche

$\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$. Formelgruppe eine uneigentliche Collineation der Fläche 2ten Grades in sich selbst."

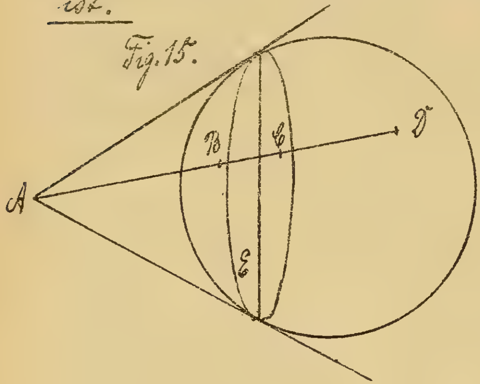
Die zweite Bemerkung ist die:

„Ein specieller Fall einer uneigentlichen Collineation ist die Centralperspektive an Pol und Polarebene, die wir gewöhnlich schlechtweg als Spiegelung bezeichnen!"

„Bei einer solchen Centralperspektive verschiebt sich ein jeder durch den Pol A laufende Strahl in der Art in sich selbst, daß jeder Punkt B eines solchen Strahles durch den anderen D

ersetzt wird, der mit ihm zum Schnitt C mit der Polarebene E und zum Pol selbst harmonisch ist."

Fig. 15.



Wir wollen einmal ein Polartetraeder einführen, dessen erste Ecke A ist. Dann lautet die Gleichung der F_2:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Centralperspektive, welche die Fläche in sich selbst überführt, ist dann gegeben durch:

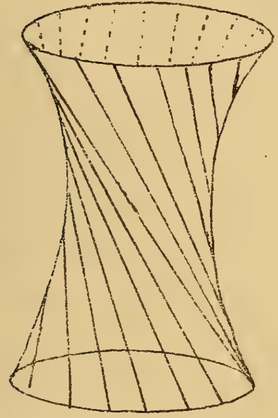
$$x_1' = -x_1.$$
$$x_2' = x_2.$$
$$x_3' = x_3.$$
$$x_4' = x_4.)$$

sodaß also nur eine Coordinate im Vorzeichen geändert wird. Das Wort „Spiegelung" bezieht sich aber wieder auf die Nicht-Euklidische Geometrie. Es ist dies in der That für die auf die F_2 zu gründende Cayley'sche Maassbestimmung der analoge Process, wie die gewöhnliche Spiegelung in der Euklidischen Geometrie.

„Daß eine solche Spiegelung aber eine uneigentliche Collineation ist, bei der sich die beiden Arten

der Erzeugenden vertauschen, sieht man am einschaligen Hyperboloid, sobald man als Pol das eigene Auge wählt, so daß die uns zugekehrte Seite des Hyperboloids mit der uns abgekehrten bei der Centralprojektion vertauscht wird."

Fig. 16.



Dies läßt sich natürlich auch analytisch bestätigen. Schließlich wollen wir noch anführen:

„Verbindet man eine beliebige uneigentliche Collineation mit einer solchen Spiegelung, so bekommt man eine eigentliche Collineation. Die uneigentliche Collineation kann also als eine Combination einer eigentlichen und einer Spiegelung angesehen werden."

Hiermit wollen wir die allgemeine algebraische Theorie der Collineation abschließen und uns zur Betrachtung der Realitätsverhältnisse wenden, indem wir die drei Typen der allgemeinen Flächen 2ten Grades gesondert behandeln. Wir beginnen mit den nullteiligen Flächen.

Nullteilige Flächen insbesondere.

Die Fläche sei, auf ein reelles Polartetraeder bezogen, auf die Form gebracht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Wir wollen nun die Substitutionen:

$$x_1' - \Sigma\ c_{1\beta}\ x\beta\ ; \quad x_2' = \Sigma\ c_{2\beta}\ x\beta\ ;$$

$$x_3' = \Sigma\ c_{3\beta}\ x\beta\ ; \quad x_4' = \Sigma\ c_{4\beta}\ x\beta$$ bestimmen, welche die Fläche in sich selber überführen. Die resultierende Gleichung muß daher wieder die Form haben:

$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0.$ Diese Aufgabe geht parallel mit der rein formentheoretischen Aufgabe, die quaternäre Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ in sich selbst durch lineare Transformationen zu transformieren. Man nennt diese Aufgabe eine <u>orthogonale Substitution.</u>"

<u>: Alle Collineationen zu bestimmen, welche eine nullteilige Fläche in sich überführen, ist daher im wesentlichen dieselbe Aufgabe wie die Aufgabe der orthogonalen Substitution bei 4 Veränderlichen."</u>

Man unterscheidet nun in den Lehrbüchern 2 Classen orthogonaler Substitutionen, je nachdem die Determinante der Coefficienten $|c_{\alpha\beta}| = +1$ oder -1 ist, (die orthogonale Substitution

erster und zweiter Art.) Wir wollen historisch bemerken, dass insbesondere die orthogonalen Substitutionen mit der Determinante +1 den eigentlichen Collineationen, die mit der Determinante −1 den uneigentlichen Collineationen entsprechen.

Über das Problem der orthogonalen Substitution ist nun eine weitschichtige Litteratur vorhanden. Wir wollen hiervon nur Einiges berichten. Haben wir n Variable, so treten in den homogenen linearen Substitutionsgleichungen n^2 Coefficienten auf. Substituieren wir nun die so erhaltenen x' in den Ausdruck $\sum_1^n k\; x_k'^2$, so ergeben sich, da die resultierende Form die Gestalt $\sum_1^n k\; x_k^2$ haben soll, $\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$ Gleichungen aus dem Verschwinden der Coefficienten der Glieder $x_l\, x_m$ für l, m und n Gleichungen aus der Forderung, dass die Coefficienten der quadratischen Glieder gleich eins sein sollen. Wie leicht zu sehen, sind also von den n^2 Constanten der Substitution nur

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$ von einander unabhängig.

Wir müssen nun vor allen Dingen die Arbeit von Cayley erwähnen, Crelle 32 (1846): „Sur quelques Propriétés des Déterminants gauches." (Diese Abhandlung findet sich auch

wieder abgedruckt in Cayley's Werken Bd. 1. № 52).

„Cayley löst dort die schon von Euler gestellte Aufgabe, die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ einer orthogonalen Substitution erster Art als rationale Funktionen von unabhängigen $\frac{n(n-1)}{2}$ Größen wirklich hinzuschreiben."

Wir wollen diese Lösung hier wiedergeben. Cayley sagt, wir setzen: $2z_\alpha = x'_\alpha + x_\alpha$, d. h. die z_α seien die arithmetischen Mittel der x_α und x'_α. Sind diese z_α nun von einander linear unabhängig? Um dies zu entscheiden, setzen wir für die x'_α ihren Wert $\Sigma_\beta\, c_{\alpha\beta}\, x_\beta$ und stellen die Determinante der Coefficienten der x_α auf. Diese lautet:

$$\begin{vmatrix} c_{11}+1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}+1 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

Man findet nun, im Falle der orthogonalen Substitution erster Art ist diese Determinante $\gtrless 0$; im Falle der Substitution zweiter Art dagegen hat sie den Wert 0. Hieraus folgt:

„Die z_α sind linear unabhängige Funktionen

der x_α im Falle der orthogonalen Substitution erster Art, im anderen Falle sind sie linear abhängig und die ganze folgende Entwickelung kommt darum nicht in Betracht."

Es wird nun weiter:

$\Sigma x_\alpha'^2 = 4\Sigma z_\alpha^2 - 4\Sigma z_\alpha x_\alpha + \Sigma x_\alpha^2$. Da nun

$\Sigma x_\alpha'^2 = \Sigma x_\alpha^2$ werden soll, so muß die Beziehung gelten:

$\Sigma z_\alpha^2 = \Sigma z_\alpha x_\alpha$. Wir werden jetzt die x_α durch die z_α linear ausdrücken; es ist dies eben bei den Substitutionen erster Art aus dem angegebenen Grunde so möglich. Wir werden etwa erhalten:

$$x_1 = \lambda_{11} z_1 + \lambda_{12} z_2 + \lambda_{13} z_3 + \ldots\ldots$$
$$x_2 = \lambda_{21} z_1 + \lambda_{22} z_2 + \lambda_{23} z_3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wir können nun leicht die Bedingungen aufstellen, die in Rücksicht auf die Beziehung $\Sigma z_\alpha^2 = \Sigma z_\alpha x_\alpha$ zwischen den Coefficienten λ bestehen müßen. Es muß sein: $\lambda_{\alpha\alpha} = 1$, $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$. Man kann demnach die $\lambda_{\alpha\beta}$ beliebig wählen, wenn man nur den $\lambda_{\beta\alpha}$ alsdann den negativen Wert der $\lambda_{\alpha\beta}$ zuerteilt. Zusammenfassend sagen wir:

" Um die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art zu finden, setze man $x_\alpha = \Sigma \lambda_{\alpha\beta} z_\beta$ mit

der Bedingung, daß alle $\lambda_{aa} = 1$ und $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$ sein soll.*)

Dann hat man x'_α nur noch gleich $2Z_\alpha - x_\alpha$ zu setzen und, will man direkt die x'_α durch die x_α ausdrücken, die Z_α aus den Gleichungssystemen zu eliminieren."

Wir wollen, um die Formeln ganz zu übersehen, für den Fall $n = 4$ dieselben einmal vollständig hinschreiben. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= Z_1 + \underline{\lambda_{12} Z_2} + \underline{\lambda_{13} Z_3} + \lambda_{14} Z_4 . \\
x_2 &= \boxed{\lambda_{21} Z_1} + Z_2 + \underline{\lambda_{23} Z_3} + \boxed{\lambda_{24} Z_4} \\
x_3 &= \boxed{\lambda_{31} Z_1} + \boxed{\lambda_{32} Z_2} + Z_3 + \underline{\lambda_{34} Z_4} \\
x_4 &= \boxed{\lambda_{41} Z_1} + \lambda_{42} Z_2 + \boxed{\lambda_{43} Z_3} + Z_4 .
\end{aligned}$$

Wir wählen als unabhängige Coefficienten die 6 folgenden: $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$, die in dem Gleichungen unterstrichen sind, während die eingeklammerten Größen den entsprechenden unterstrichenen entgegengesetzt gleich seien. Dann finden wir für die $x'_\alpha = 2Z_\alpha - x_\alpha$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= Z_1 + \boxed{\lambda_{21} Z_2} + \boxed{\lambda_{31} Z_3} + \boxed{\lambda_{41} Z_4} . \\
x'_2 &= \underline{\lambda_{12} Z_1} + Z_2 + \boxed{\lambda_{32} Z_3} + \underline{\lambda_{42} Z_4} . \\
x'_3 &= \underline{\lambda_{13} Z_1} + \underline{\lambda_{23} Z_2} + Z_3 + \boxed{\lambda_{43} Z_4} . \\
x'_4 &= \underline{\lambda_{14} Z_1} + \boxed{\lambda_{24} Z_2} + \underline{\lambda_{34} Z_3} + Z_4 .
\end{aligned}$$

*) Man nennt eine solche Substitution wohl „antisymmetrisch."

und wenn wir die orthogonale Substitution haben wollen, d. h. wissen wollen, wie die x' sich durch die x ausdrücken, so müssen wir die z aus diesen beiden Gleichungssystemen eliminieren. Wir führen nun die Bezeichnung „schiefe Substitution" ein für diejenige Substitution, bei der die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich, die Coefficienten der Diagonalglieder dagegen einander gleich, beziehungsweise gleich 1 sind.

Unser Resultat lautet dann in Worten:

„Man erhält die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art, indem man die x und x' aus den Hülfsgrößen z je durch eine schiefe Substitution zusammensetzt, von denen die eine die transponirte*) der andern ist, und dann die Hülfsgrößen z eliminiert."

Dies ist die ursprüngliche Cayley'sche Theorie, welche an die Zahl der Variabeln gar nicht geknüpft ist. Für den Fall $n = 4$ den wir speciell durchgeführt haben, ergiebt sich nun noch eine andere Darstellung der orthogonalen Substitution und zwar auf geometrischer Basis beruhend, indem wir auf die Operationen der Schiebungen bei den Flächen 2ten Grades zurückgehen.

*) v. Wintervorlesung.

„Bei n = 4 müssen sich nämlich die hier erhaltenen Formeln mit 6 willkürlichen Coefficienten in die Aufeinanderfolge zweier kleinerer Formeln spalten lassen, von denen jede nur 3 willkürliche Constanten enthält, dem Umstande entsprechend, dass sich die allgemeine Collineation erster Art der Flächen 2ten Grades in sich selbst durch die Aufeinanderfolge zweier Schiebungen erzielen lässt." (v. pag. 105.).

Wir werden so zu Formeln gelangen, die Cayley gleichfalls gefunden hat, ohne dass er angiebt, auf welchem Wege er dazu gekommen ist. Die in Betracht kommende Abhandlung von Cayley findet sich Crelle Bd. 50 (1855); sie ist wieder abgedruckt in Bd. II seiner Werke № 37: „Recherches Ultérieures sur les Déterminants gauches."

Wir wollen diese Formeln jetzt auf unserem Wege ableiten. Unsere nächsten Entwickelungen werden sich übrigens allgemein auf Flächen 2ten Grades beziehen, nicht nur auf nullteilige Flächen. Wir gehen von der Gleichung der Fläche zweiten Grades, der ein Polartetraeder zu Grunde liegt: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0$ zu der auf ein Tangentialtetraeder bezogenen Gleichungsform über, indem wir setzen:

$y_1 = x_1 + ix_3$; $y_2 = x_2 + ix_4$

$y_3 = x_1 - ix_3$; $y_4 = x_2 - ix_4$ Wir erhalten die Gleichung:

$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$. Wir werden zur Durchführung der Rechnung weiterhin auch die inversen Operationen gebrauchen, welche die x durch die y ausdrücken:

$$2x_1 = y_1 + y_3 ; \qquad 2x_3 = i(-y_1 + y_3).$$
$$2x_2 = y_2 + y_4 ; \qquad 2x_4 = i(-y_2 + y_4).$$

Gestützt auf die Gleichung: $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ führen wir nun die Parameter λ und μ der Erzeugenden erster und zweiter Art ein und zwar sogleich in homogener Form: $\left(\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$.

Die Erzeugenden erster und zweiter Art sind dann gegeben durch die Gleichungspaare:

$$1.) \begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad 2.) \begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0. \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0. \end{cases}$$

Der neue Gedanke, den wir bislang noch nicht gefasst hatten, besteht dann darin, daß wir die Coordinaten eines Flächenpunktes durch λ und μ ausdrücken; wir können dies, da durch jeden Punkt der Fläche <u>eine</u> Erzeugende λ und <u>eine</u> Erzeugende μ hindurchgeht; mit anderen Worten, wir lösen die 4 Gleichungen nach den y_α auf, indem

wir die λ und μ als bekannt ansehen. Wir erhalten:

$$\rho\, y_1 = \lambda_1 \mu_1 .$$
$$\rho\, y_2 = \lambda_2 \mu_1 .$$
$$\rho\, y_3 = \lambda_2 \mu_2 .$$
$$\rho\, y_4 = \lambda_1 \mu_2 .$$

Wir führen nun eine Schiebung erster Art und zugleich eine Schiebung zweiter Art aus, dieselben sind charakterisiert durch eine lineare Substitution der λ resp. der μ mit nicht verschwindender Determinante.

Wir setzen also:

$$\lambda_1' = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 .$$
$$\lambda_2' = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 ; \text{ wo } \alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0 \text{ sei, und:}$$
$$\mu_1' = a \mu_1 + b \mu_2 .$$
$$\mu_2' = c \mu_1 + d \mu_2 ; \text{ wo } ad - bc \gtrless 0 \text{ sei.}$$

Bei diesen Operationen werden die Punkte y in Punkte y' übergehen. Es wird alsdann:

$$\rho' y_1' = \lambda_1' \mu_1' = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)(a\mu_1 + b\mu_2) = (\alpha a y_1 + \beta a y_2 - \beta b y_3 + \alpha b y_4) \cdot \rho .$$
$$\rho' y_2' = \lambda_2' \mu_1' = (\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2)(a\mu_1 + b\mu_2) = (\gamma a y_1 + \delta a y_2 - \delta b y_3 + \gamma b y_4) \cdot \rho .$$
$$\rho' y_3' = -\lambda_2' \mu_2' = -(\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2)(c\mu_1 + d\mu_2) = -(\gamma c y_1 + \delta c y_2 - \delta d y_3 + \gamma d y_4) \cdot \rho$$
$$\rho' y_4' = \lambda_1' \mu_2' = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)(c\mu_1 + d\mu_2) = (\alpha c y_1 + \beta c y_2 - \beta d y_3 + \alpha d y_4) \cdot \rho .$$

„Damit haben wir dann in der That die quaternäre Collineation gefunden, welche den binären Substitutionen der λ, μ entspricht."

Wollen wir insbesondere eine quaternäre Substitution mit der Determinante 1 haben, so werden wir nur jede der zuletzt hingeschriebenen Gleichungen durch die vierte Wurzel aus der Coefficienten-Determinante beiderseits zu dividieren haben. Es zeigt sich nun, daß letztere gleich $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2(ad-bc)^2$ ist. Wir erhalten also nach Ausführung der angegebenen Operation, indem wir zugleich links den Proportionalitätsfaktor fortlassen:

$$y_1' = \frac{(\alpha a y_1 + \beta a y_2 - \beta b y_3 + \alpha b y_4)}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)(ad-bc)}}$$; analog lauten die Gleichungen für $y_2' \colon y_3' \colon y_4'$. Wir ergänzen dies mit den Worten:

„Insbesondere bekommen wir eine quaternäre lineare Substitution von der Determinante +1, wenn wir jeden unserer 4-gliedrigen linearen Ausdrücke auf der letzten Seite durch $\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)(ad-bc)}$ dividieren."

Wir wollen diese Formeln nun ausdrücklich hinschreiben für den Fall, daß wir nur eine Schiebung der ersten Art haben, daß die a, d also eine identische Substitution erleiden.

Es wird.

$$y_1' = \frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)}} \; ; \; y_3' = \frac{\delta y_3 - \beta y_4}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)}}.$$

$$y'_2 = \frac{\gamma y_1 + \delta y_2}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}} \; ; \; y'_4 = \frac{-\beta y_3 + \alpha y_4}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}}.$$

Wir werden jetzt zu den Coordinaten x zurückgehen, indem wir die Substitutionsformeln auf pag. 115. anwenden. Die hierbei nötig werdende Rechnung ist sehr einfach, wir geben sogleich das Resultat an:

$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_1 = (\alpha+\delta)x_1 + (\beta-\gamma)x_2 + i(\alpha-\delta)x_3 + i(\beta+\gamma)x_4.$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_2 = (-\beta+\gamma)x_1 + (\alpha+\delta)x_2 + i(\beta+\gamma)x_3 + i(-\alpha+\delta)x_4.$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_3 = i(-\alpha+\delta)x_1 + i(-\beta-\gamma)x_2 + (\alpha+\delta)x_3 + (\beta-\gamma)x_4.$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_4 = i(-\beta-\gamma)x_1 + i(\alpha-\delta)x_2 + (-\beta+\gamma)x_3 + (\alpha+\delta)x_4.$$

Diese Substitutionsformeln für eine Schiebung erster Art enthalten noch die imaginäre Einheit i; wir werden daher jetzt die $\alpha\beta\gamma\delta$ so in einen reellen und imaginären Teil zu spalten suchen, dass alles Imaginäre aus unseren Formeln herausfällt. Dies wird geleistet, wenn wir setzen:

$$\alpha = A + iC \; ; \; \beta = -B + iD.$$
$$\delta = A - iC \; ; \; \gamma = +B + iD.$$

Die Substitution, welche λ erleidet, lautet dann:

$$\lambda' = \frac{(A+iC)\lambda - B + iD}{(B+iD)\lambda + A - iC}.$$

Wir können uns nun fragen, worauf es beruht, dass die Coefficienten $\alpha\beta\gamma\delta$ diese merkwürdige Form haben. Wir werden

die weiter noch näher ausführen, wenn wir die bei der Collineation festbleibenden Punkte berechnen. Wir werden finden, daß diese besondere Form $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ bedingt, daß die beiden bei der Substitution festbleibenden Werte von λ diametral imaginär sind, und umgekehrt durch die Forderung, daß sie es sein sollen, festgelegt wird.

„Es müßen nämlich in der That bei einer reellen Schiebung zwei konjugiert imaginäre Erzeugende festbleiben, und diesen korrespondieren, wie wir von früher her wißen, diametrale Parameterwerte."

Tragen wir nun für die $\alpha\beta\gamma\delta$ ihre Werte in unsere Formeln ein, so kommt:

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_1' = A x_1 - B x_2 - C x_3 - D x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_2' = B x_1 + A x_2 - D x_3 + C x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_2' = C x_1 + D x_2 + A x_3 - B x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_2' = D x_1 - C x_2 + B x_3 + A x_4 .$$

Dies sind also die Formeln, welche sich für unsere reellen Schiebungen erster Art ergeben. Sie stellen eine schiefe Substitution von besonders einfachem Aufbau dar, indem in den Diagonalgliedern überall A steht, die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich sind, ausserdem jedoch auf jeder Seite der Diagonale

je zwei der einzelnen Coefficienten gleich sind.

Für die Schiebungen „zweiter Art" bekommen wir die analogen Gleichungen:

$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\cdot X_1' = A'x_1 - B'x_2 - C'x_3 - D'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\cdot X_2' = B'x_1 + A'x_2 + D'x_3 - C'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\cdot X_3' = C'x_1 - D'x_2 + A'x_3 + B'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\cdot X_4' = D'x_1 + C'x_2 - B'x_3 + A'x_4.$$

„Die Schiebungen zweiter Art liefern daher Formeln, welche sich von denen der ersten Art nur in 6 Vorzeichen unterscheiden."

Wir werden dann die allgemeinste Substitution der verlangten Eigenschaft erhalten, wenn wir die Substitutionen einer Schiebung erster Art und einer Schiebung zweiter Art hinter einander anwenden.

Wie werden wir diese Formeln nun leicht im Gedächtnis behalten können? In dieser Hinsicht ist die Bemerkung Cayley's (l.c.) von Interesse, daß die Eigenschaft: die Summe der Quadrate der x ist bei diesen Substitutionen immer gleich der Summe der Quadrate der X', sich in analoger Weise wieder findet in der Theorie der Hamilton'schen Quaternionen. Wir wollen dies kurz angeben.

Unter einer Quaternione p versteht man eine viergliedrige komplexe Zahl:

$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$, wo i, j, k 3 komplexe Einheiten sind, für die specielle Rechnungsregeln zu definieren sein werden. Es sei eine zweite Zahl q gegeben:

$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$. Wie man p und q addiert oder subtrahiert, davon braucht man wohl kaum zu sprechen. Was die Multiplikation von p und q angeht, so ist darüber zu sagen: man multipliciert p und q gerade so, als ob i, j, k unbestimmte Größen wären. Dann setzen wir:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

$$jk = i, \; ki = j, \; ij = k.$$

Dies sind die speciellen Multiplikationsregeln, die der Rechnung mit Quaternionen zu Grunde liegen.

Nun ist:

$$\begin{array}{l} j \cdot k^2 = i \cdot k \\ j \cdot k^2 = -j. \\ \hline ik = -j. \end{array}$$

Hierbei ist das Gesetz als gültig angenommen, daß $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ ist.

So folgt aus obigen Rechenregeln, daß $jk = -i$, $ik = -j$, $ji = -k$ ist.

In Folge dieser Rechenregeln ist im Gebiete von Hamilton's Quaternionen die Multiplikation keine commutative Operation, es ist keineswegs $p \cdot q = q \cdot p$.

Rechnen wir nun einmal $p \cdot q$ aus, so kommt:

$$\begin{aligned}
p\cdot q = & \; p_0 q_0 + i p_0 q_1 + j p_0 q_2 + k p_0 q_3 \\
& - p_1 q_1 + i p_1 q_0 - j p_1 q_3 + k p_1 q_2 \\
& - p_2 q_2 + i p_2 q_3 + j p_2 q_0 - k p_2 q_1 \\
& - p_3 q_3 - i p_3 q_2 + j p_3 q_1 - k p_3 q_0 \quad \text{oder} \\
= & \; p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\
& + i(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) \\
& + j(p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) \\
& + k(p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_3 q_0).
\end{aligned}$$

Das Produkt zweier Quaternionen ist daher eine dritte Quaternione geworden. Hätten wir $q \cdot p$ gebildet, so würden gewisse Vorzeichen im Endausdruck sich geändert haben.

Die Quaternionen finden ihre hauptsächliche Anwendung in der Theorie der orthogonalen Substitutionen von 3 und 4 Veränderlichen, man kann sagen, daß gerade für diese der Quaternionencalcul erfunden ist. Wir mögen uns insbesondere fragen: Wie drücken sich nun unsere Substitutionen auf pag. 125 in der Quaternionensprache aus?

Es wird, wie man sich leicht überzeugt, gesetzt werden können, für die erste Formelgruppe:

$$(x_1' + i x_2' + j x_3' + k x_4') = \frac{(A + iB + jC + kD)(x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}.$$

Diese eine sehr symmetrisch gebaute Formel ersetzt

vollständig die Substitutionsformeln für die Schiebungen erster Art. Was nun die abweichenden Zeichen für die Schiebungen zweiter Art angeht, so ergeben sich dieselben gerade dann, wenn wir dieselbe Formel mit vertauschter Reihenfolge der Faktoren schreiben:

$$(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = \frac{(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD')}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2}}$$

Die allgemeinste orthogonale Substitution bei 4 Veränderlichen schreibt sich dann einfach, indem wir einen Faktor M einführen:

$$M.(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') =$$
$$(A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD')$$

„In diesen Formeln ist in einfachster Weise unsere geometrische Theorie, daß jede eigentliche Collineation der Flächen zweiten Grades sich aus 2 Schiebungen der einen und der anderen Art zusammensetzt, analytisch formuliert." Wir fügen noch hinzu: „Für unsere geometrischen Anwendungen ist M ein Proportionalitätsfaktor. Wollen wir aber eine eigentliche orthogonale Substitution haben, soll also die Substitutionsdeterminante $= +1$ sein, so müssen wir für M den Wert in Anwendung bringen:

$$M = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2)}$$ *)"

*) Setzen wir in der Formel des Textes für $B', C', D' = -B, -C, -D$, so

Dies ist also die Theorie der eigentlichen Transformationen einer mehrteiligen Fläche zweiten Grades in sich, welche sich auf Grund unserer geometrischen Betrachtungen ergiebt und die Cayley durch analytische Umformung erreichte.

„Cayley entwickelt nun ausführlich an dem genannten Orte, wie diese speciellen Formeln für $n = 4$, die so einfach und elegant sind, wie möglich, mit seinen allgemeinen Formeln, die für beliebige n gelten, zusammenhängen." Wir wollen in dieser Hinsicht nur die eine Thatsache anführen: Wir haben die allgemeinen linearen Substitutionen durch 6 Constante $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$ charakterisiert.

Der Vergleich von Cayley ergiebt nun:
„Wir erhalten eine Schiebung erster Art, wenn $\lambda_{12} = \lambda_{34}, \lambda_{13} = \lambda_{42}, \lambda_{14} = \lambda_{23}$ ist, dagegen eine Schiebung zweiter Art, wenn: $\lambda_{12} = -\lambda_{34}, \lambda_{13} = -\lambda_{42}, \lambda_{14} = -\lambda_{23}$ ist."

Es ist nun wohl am Platze, daß wir die entwickelten Formeln auf ihren reell-geometrischen Inhalt prüfen. Was bedeutet eine solche reelle Collineation,

---

Bestimmen wir in $M(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = (\mathfrak{A} + i\mathfrak{B} + j\mathfrak{C} + k\mathfrak{D})(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(\mathfrak{A} - i\mathfrak{B} - j\mathfrak{C} - k\mathfrak{D})$, indem $x_1' = x_1$ wird und sich also die x_2, x_3, x_4 nur unter sich substituieren, die allgemeinste orthogonale Transformation der 3 Veränderlichen x_2, x_3, x_4.

wie sie durch eine Schiebung erster Art dargestellt wird.? Wie wandern die Punkte des Raumes bei einer solchen Collineation? Es bleiben offenbar, algebraisch zu reden, 2 Erzeugende der ersten Art punktweise fest; wir haben es also mit einer windschiefen Perspektive zu thun, für die diese beiden Erzeugenden die Leitlinien sind. Diese sind nun beide wie wir wissen imaginär und zwar konjugiert imaginär, und rechts gewunden. Dann giebt es, wie wir gesehen haben, eine ganze Congruenz reeller Linien, die diese beiden imaginären Linien schneiden, durch jeden Punkt des Raumes geht je eine bestimmte gerade Linie derselben hindurch. Diese Congruenz ist links gewunden. Unsere Formeln besagen also:

„Unter A, B, C, D reelle Constante verstanden, erfährt der Raum eine reelle Collineation, bei der jeder Punkt auf der durch ihn hindurchgehenden geraden Linie einer bestimmten links gewundenen Congruenz mit imaginären Leitlinien ein Stück weit verschoben wird."

Wir wollen nun analoge Betrachtungen für die ringförmigen Flächen durchführen.

Es sei die Gleichung einer solchen Fläche gegeben durch:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ oder, indem wir ein reelles

Tangentialtetraeder zu Grunde legen, durch:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Wir führen in bekannter Weise die Parameter λ und μ der zwei Arten der geradlinigen Erzeugenden ein durch:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0 \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0. \end{cases}$$

und betrachten wieder die λ und μ als Coordinaten eines Flächenpunktes. Wir haben alsdann in gleicher Weise wie pag. 116. die Beziehungen:

$$\varrho y_1 = \lambda_1 \cdot \mu_1.$$
$$\varrho y_2 = \lambda_2 \cdot \mu_1.$$
$$\varrho y_3 = -\lambda_2 \cdot \mu_2$$
$$\varrho y_4 = \lambda_1 \cdot \mu_2$$

Die y_1, y_2, y_3, y_4 sind jedoch jetzt, im Gegensatz zu pag. 116., für reelle Punkte auch reell.

Eine Schiebung der ersten Art wird gegeben durch die Formeln:

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta} \quad \text{oder:} \quad \lambda'_1 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2. \quad \lambda'_2 = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2.$$

Analog lauten die Formeln für eine Schiebung zweiter Art. Wir erkennen sogleich:

<u>Es giebt jetzt ebenso wie bei der nullteiligen Fläche dreifach ∞ viele reelle Schiebungen der einen und der anderen Art; dieselben sind jetzt dadurch</u>

charakterisiert, daß die zugehörigen Substitutionen von λ und μ reelle Coefficienten haben."

Wir geben jetzt unseren Betrachtungen eine neue Wendung, indem wir darauf ausgehen, auf unseren Flächen zweiten Grades eine „Geometrie" zu entwerfen. Dazu war bei den nullteiligen Flächen kein Anlaß, da doch besonders reelle Verhältniße unser Interesse beanspruchen.

Wie man in der Ebene die Gleichung:
$f(x, y) = 0$ oder homogen geschrieben:
$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – wo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ – als eine Curve interpretiert, so werden wir jetzt Gleichungen zwischen den λ und μ betrachten, $f(\lambda, \mu) = 0$, die wir als Curven auf der Fläche deuten. Um diese Gleichungen homogen zu machen, führen wir jedoch jetzt nicht ternäre homogene Variable ein, sondern wir setzen:

$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, wodurch wir eine Gleichung bekommen:

$f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$, die in den λ wie in den μ binär homogen ist.

[Hier eine doppelt-binäre Form gleich Null gesetzt –, oben eine ternäre Form gleich Null gesetzt.]

Diesem Unterschied in der homogenen

Darstellung entspricht ein Unterschied in der Auffassungsweise, den wir uns klar machen wollen, indem wir an die Ideen der Wintervorlesung anknüpfen. [vgl. Erlanger Programm von 1872.]

In der gewöhnlichen Geometrie der Ebene betrachten wir die Figuren unabhängig von ihrer absoluten Lage und Größe. Sprechen wir von einem rechtwinkligen Dreieck, so ist es ganz gleich, an welcher Stelle der Ebene wir dasselbe gelegen sein lassen, wie groß absolut genommen sein Flächeninhalt ist; mit anderen Worten: wir betrachten die Figuren unabhängig von einer Parallelverschiebung, Drehung und (gleichmäßigen) Vergrößerung oder Verkleinerung. Bei der projektiven Auffassung, die uns hier allein interessiert, sind sogar alle die Figuren identisch, die durch Projektion aus einander hervorgehen. Diese Projektion wird gegeben durch:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}; \qquad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''};$$

oder homogen geschrieben:

$$\varrho x_1' = a x_1 + b x_2 + c x_3.$$
$$\varrho x_2' = a' x_1 + b' x_2 + c' x_3.$$
$$\varrho x_3' = a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3.$$ Wir können sagen:

„Gleichungen zwischen 2 Variabeln x und y werden in der projektiven Geometrie der Ebene nur hinsichtlich solcher Eigenschaften gedeutet, welche bei der Gruppe der hier hingeschriebenen linearen Substitutionen ungeändert bleiben und da diese Substitutionen sich am einfachsten schreiben, wenn man in der üblichen Weise 3 homogene Veränderliche einführt, so ist es in der projektiven Geometrie der Ebene angezeigt, statt mit x und y gleich mit x_1, x_2, x_3 d. h. ternär zu operieren."

Wir erkennen jetzt leicht, wie die entsprechenden Verhältnisse sich gestalten, wenn wir eine Geometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades konstruieren wollen. Die Flächen zweiten Grades können, wie wir sahen, durch ∞^6 Collineationen in sich übergeführt werden; in den λ und μ stellt sich dies durch die Formeln dar:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\ ;\ \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}.$$

„Auf der Fläche zweiten Grades finden daher die Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen $f(\lambda, \mu) = 0$ hinsichtlich aller derjenigen ihrer Eigenschaften eine projektiv geometrische Interpretation

die ungeändert bleiben, wenn λ und μ jedes für sich unabhängig von dem anderen einer gebrochenen linearen Substitution unterworfen wird."

Hierdurch bekommt die Geometrie auf den Flächen 2ten Grades eine ganz andere Form als die der Ebene; es liegt dies eben daran, daß die Gruppe der Umänderungen beidemal eine ganz andere ist. Die obigen Substitutionen der λ und μ schreiben wir nun bequem in homogener Form so:

$$\varrho\lambda_1' = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \qquad \sigma\mu_1' = a\mu_1 + b\mu_2$$
$$\text{und}$$
$$\varrho\lambda_2' = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \qquad \sigma\mu_2' = c\mu_1 + d\mu_2$$

„Diesem Umstande wird nun eben dadurch am klarsten Rechnung getragen, daß man statt der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ eine doppelt binäre Form $f(\lambda_1; \lambda_2; \mu_1; \mu_2) = 0$ setzt."

Die allgemeine Auffassung aber, um welche es sich handelt, wird sich vielleicht anschließend hieran mit den Worten bezeichnen lassen:

„Es giebt bei 2 Veränderlichen so viel verschiedenartige Betrachtungsweisen der Gleichung $f(x, y)$ oder $f(\lambda, \mu) = 0$ und also so viele Arten von zweidimensionaler Geometrie als es verschiedene geschlossene Gruppen giebt, die man

aus Transformationen der x und y zusammensetzen kann, und je nach der Art dieser Gruppe wird es zweckmäßig sein, bald die eine, bald die andere Art, sei es homogener sei es nicht homogener Variabler zu benutzen."

Litterarische Bemerkung. Eine zusammenhängende Theorie der doppelt binären Formen ist erst vor ca. 10 Jahren geschaffen worden:

Capelli 1879. Giornale di Matematiche Bd. 17. Man wird dieser Arbeit, was die Entwickelung der Invariantentheorie angeht, unzweifelhaft eine große Bedeutung beilegen müssen; in der That kommen wir jetzt ohne die dort zum ersten Male gegebenen Ansätze gar nicht mehr zurecht. [Vgl. Referat von Nöther, Fortschr. der Mathem. Bd. 11. pag. 91-95.]

Wir wollen nun einige Einzelheiten der Geometrie auf den Flächen 2ten Grades betrachten. Es sei gegeben die algebraische Gleichung: $f(\lambda, \mu) = 0$; sie möge vom l^{ten} Grade in den λ und vom m^{ten} Grade in den μ sein. Welcher Art ist die hierdurch dargestellte Curve? Für λ = const. liefert die Gleichung m Werte von μ, für μ = const. entspr. l Werte von λ. Dies besagt: „Eine Erzeugende erster Art wird von der

Curve, algebraisch zu reden, in m Punkten geschnitten, eine Erzeugende zweiter Art wird von der Curve in l Punkten geschnitten."

Schneiden wir unsere Raumkurve durch eine Tangentialebene, so erhalten wir auf der einen Erzeugenden m Punkte, auf der anderen l Punkte.

„Die Zahl der Schnitte mit der Tangentialebene und damit die Ordnung der Curve ist also $l+m$."

Wir wollen die einfachsten Fälle solcher Curven auf den Flächen 2ten Grades einmal aufzählen:

Die Raumkurven erster Ordnung auf den Flächen 2ten Grades ($l+m=1$) sind natürlich die Erzeugenden der ersten oder der zweiten Art, je nachdem $l=1$ und $m=0$ oder $m=1$ und $l=0$ ist.

Setzen wir $l+m=2$, betrachten wir also eine Curve zweiter Ordnung auf der F_2, so haben wir die drei Fälle zu unterscheiden, daß:

$$l=2, \quad n=0$$
$$l=0, \quad n=2$$
$$l=1, \quad n=1 \quad \text{ist.}$$

Die ersten beiden Fälle ergeben eine quadratische Gleichung der λ resp. der μ allein, liefern daher nur 2 Erzeugende der ersten resp. der zweiten Art, also keine neuen Curven. Im dritten Falle dagegen bekommen wir einen ebenen Kegelschnitt.

„Ein ebener Schnitt der Fläche ist demnach dasselbe wie eine bilineare Gleichung zwischen den λ und μ."

In der That liefert die Gleichung

$0 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4$ vermöge der Formeln pag. 132 direkt die Bilinearrelation:

$$0 = u_1 \lambda_1 \mu_1 + u_2 \lambda_2 \mu_2 - u_3 \lambda_2 \mu_2 + u_4 \lambda_1 \mu_2 .$$

Wir können dann ferner Curven dritter Ordnung in Betracht ziehen ($l + m = 3$). Hier haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden:

$l = 2, \; m = 1$ und

$l = 1, \; m = 2$. Mit diesen Raumkurven hat man sich ja sehr viel beschäftigt, sie nehmen im Raume fast dieselbe Stellung ein wie die Kegelschnitte in der Ebene. Näher hierauf einzugehen wird jedoch nicht möglich sein.

Wir wollen nun weitergehend uns fragen: Kann man auf den Flächen 2ten Grades eine Maassgeometrie konstruieren in analoger Weise, wie wir in der Ebene uns eine Maassgeometrie entworfen haben? Allgemein ist zu sagen:

„Die Geometrie im zweifach ausgedehnten Gebiete wird eine Maassgeometrie, wenn die zu Grunde gelegte Gruppe von Aenderungen erstens dreifach ∞ ist und zweitens für jedes Punktepaar des Gebietes eine

Invariante ergiebt, (die wir als Entfernung dieser beiden Punkte deuten werden.)

Die projektive Geometrie der Ebene hat nun bekanntlich eine Gruppe von achtfach ∞ vielen Collineationen. Wenn man daher von der projektiven Geometrie aus eine Maassgeometrie konstruieren will, so muſs man jedenfalls so viel Collineationen ausscheiden, daſs nur noch eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Collineationen bleibt.

„Ein Beispiel für unseren letzten Satz ist daher dieses, daſs wir von der projektiven Geometrie der Ebene mit ihren 8 fach ∞ vielen Collineationen zur Cayleyschen Maassbestimmung, d.h. zur Nicht-Euklidischen Geometrie, kommen, sobald wir einen Kegelschnitt festhalten; da es deren ∞^5 giebt, geht jeder derselben noch durch dreifach ∞ viele Collineationen in sich über."

[Aus dieser Cayleyschen Maassgeometrie wurde dann die gewöhnliche Euklidische Geometrie, wenn der Kegelschnitt in ein Punktepaar und zwar spez. in das Paar imaginärer Kreispunkte ausartete.]

Wie liegen die Verhältniſse nun bei den Flächen zweiten Grades?

„Wir haben auf denselben zunächst auch mehr

als dreifach ∞ viele, nämlich 6 fach ∞ viele Umänderungen in Betracht gezogen. Wollen wir eine Maassgeometrie auf den Flächen zweiten Grades haben, müßen wir vor allen Dingen wieder ein geometrisches Gebilde auf den Flächen zweiten Grades festhalten, so, daß nur noch 3 fach ∞ viele Transformationen zuläßig bleiben."

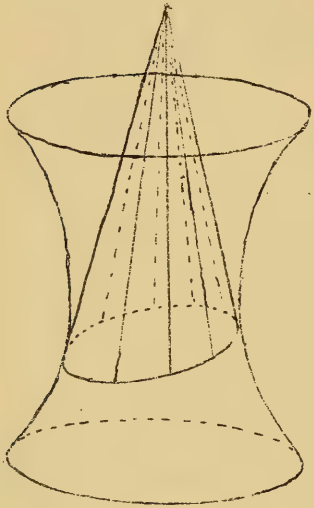
Wir wählen als solches festbleibendes Gebilde die Curve zweiter Ordnung, welche durch eine beliebige Ebene ausgeschnitten wird, und betrachten dementsprechend nur diejenigen Collineationen der Fläche in sich, welche diese Ebene in sich überführen. Wir scheiden so in der That aus der Gesammtheit der 6 fach unendlich vielen Umformungen der Fläche 2ten Grades eine dreifach unendliche Gruppe aus, da es ja dreifach unendlich viele Ebenen des Raumes giebt.

Daß es wirklich eine zugehörige Maassgeometrie auf der Fläche giebt, und welcher Art dieselbe ist, sehen wir am besten durch folgende Betrachtungen:

Bei den in Rede stehenden Umformungen bleibt nicht nur die Schnittebene, sondern auch der Pol der Schnittebene fest und mit ihm der ganze Umhüllungskegel, den man vom Pol aus

nach dem Schnitte an die Fläche legen kann.

P.



In Bezug auf diesen festbleibenden Kegel zweiter Ordnung können wir dann aber für die vom Pol auslaufenden Strahlen in bekannter Weise eine Cayley'sche Maassbestimmung gründen: „Unsere dreifach unendlich vielen Collineationen des Raumes ergeben für die vom Pol auslaufenden Strahlen gerade diejenigen Bewegungen, bei denen die nicht-Euklidischen Winkel erhalten bleiben, welche diese Strahlen bezüglich des vom Pol auslaufenden Umhüllungskegel mit einander einschließen."

„Wir werden nun eine nicht-Euklidische Maassbestimmung auf einer Fläche 2ten Grades haben, für welche unsere ∞^3 Collineationen die Bewegungen abgeben, wenn wir als Entfernung zweier Flächenpunkte einfach den nicht-Euklidischen Winkel wählen, unter welchem diese Flächenpunkte vom Pol aus gesehen werden,

insbesondere also als Länge eines Bogenelementes auf der Fläche zweiten Grades den ∞ kleinen Winkel betrachten, den die bezüglichen Projektionsstrahlen mit einander bilden."

Dies läßt sich nun alles analytisch ausführen, wir wollen nur die Resultate mitteilen. Dieselben stützen sich auf die Definition des Winkels zweier Strahlen eines Bündels, die wir im vorigen Semester gegeben haben: $i \cdot k' \cdot \log.(DV)$, wo DV das Doppelverhältnis dieser Strahlen mit den beiden Schnittstrahlen ihrer Ebene und des absoluten Kegels bezeichnet. (cfs. die Wintervorlesung.). Es wird hiernach der Abstand M zweier Punkte auf der Fläche zweiten Grades mit den Punkten λ, μ und λ', μ':

$$M = 2k' \text{ arc. sin} \sqrt{\frac{(\lambda\lambda')(\mu\mu')(u_1 u_3 + u_2 u_4)}{(u_1\lambda_1\mu_1 + u_2\lambda_2\mu_1 - u_3\lambda_2\mu_2 + u_4\lambda_1\mu_2)(u_1\lambda'_1\mu'_1 + \dots)}}$$

(wo k' eine beliebige Constante und $u_y = 0$ die Schnittebene, $u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0$ aber die Bedingung ist, unter welcher die Ebene die Fläche berührt.) Insbesondere ergiebt sich hieraus (für zwei unendlich benachbarte Punkte) das Bogenelement ds, wenn man $\lambda' = \lambda + d\lambda$ und $\mu' = \mu + d\mu$ setzt.

$$ds = 2k' \frac{\sqrt{(\lambda d\lambda)(\mu d,\mu)(u_1 u_3 + u_2 u_4)}}{(u_1\lambda_1\mu_1 + \dots)}$$

Wir knüpfen hieran folgende Bemerkungen:

1.) Die Punkte unseres ebenen Schnittes sind unendlich weit; denn für sie werden die Factoren im Nenner:

$$u_1 \lambda_1 \mu_1 + u_2 \lambda_2' \mu_1' - u_3 \lambda_2 \mu_2 + u_4 \lambda_1 \mu_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$u_1 \lambda_1' \mu_1' + u_2 \lambda_2' \mu_1' - u_3 \lambda_2' \mu_2' + u_4 \lambda_1' \mu_2' = 0.$$

2.) Die Erzeugenden unserer Fläche zweiten Grades haben die Länge 0. Denn wenn $\lambda = \lambda'$ oder aber $\mu = \mu'$, was ja besagt, daſs beide Punkte auf derselben Erzeugenden liegen, so verschwindet ein Factor im Zähler.

3.) Wenn wir eine Tangentialebene festgehalten haben, so daſs also $u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0$ ist, dann wird M zunächst identisch 0 und erst durch einen zweckmässigen Grenzübergang kann man ein von 0 verschiedenes M definieren. (Man läſst zu dem Zwecke das k' ∞ werden, der Art, daſs es multipliciert mit dem unendlich kleinen Bogen oder sin. Endliches ergiebt.

Es wird dann:

$$M = 2c' \cdot \sqrt{\frac{(\lambda\lambda')(\mu\mu')}{(u_1\lambda_1\mu_1 + \cdots)(u_1\lambda_1'\mu_1' + \cdots)}} \text{ werden.)}$$

4.) Im allgemeinen hat diese Maassbestimmung auf der Fläche 2ten Grades selbstverständlich nicht =

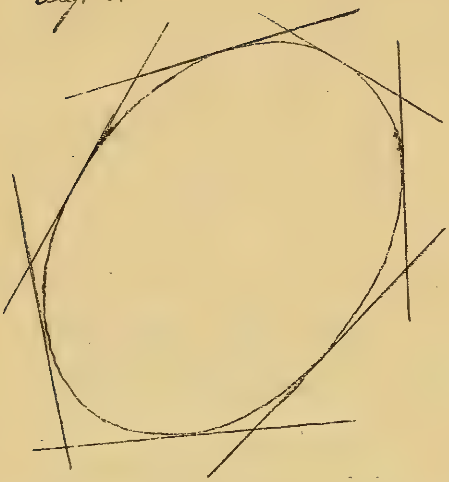
Euklidischen Charakter, im Grenzfall wird es eine Euklidische Maassbestimmung sein.

Wir haben bei diesen Bemerkungen nur erst einen allgemein-algebraischen Standpunkt eingenommen.

Wenn wir jedoch auf die Realitätsverhältnisse Rücksicht nehmen wollen, so werden wir sehen, dass sich dieselben für die ringförmigen Flächen freilich so verschieden wie möglich von denjenigen gestalten, die wir in der elementaren Geometrie der Ebene haben, indem alles das imaginär wird, was in der gewöhnlichen Geometrie reell ist und umgekehrt.

Es findet dies seinen Grund darin, dass es sich, wenn wir vom Pol auf die Polarebene projicieren, in letzterer zwar um die hyperbolische Geometrie bezüglich des einteiligen Schnittkegelschnittes handelt, wohlverstanden aber in demjenigen Teil der Ebene, der ausserhalb dieses Kegelschnittes liegt. Das angegebene ds^2 ist dementsprechend eine indefinite quadratische Form der $d\lambda$, $d\mu$, die Linien ohne Länge sind reell, etc. etc. Wir haben gleichwohl diese Maassgeometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades entwickelt, um den Contrast mit den analogen Beziehungen bei den

Fig. 13.



ovalen Flächen hervortreten zu lassen, bei denen sich alles aufs schönste unseren gewöhnlichen Anschauungen entsprechend gestaltet.

Wir wollen noch einige allgemeine Bemerkungen über die ringförmigen Flächen anschliessen.

Alle Bogenelemente der verschiedenen für dieselbe Fläche geltenden Maassbestimmungen sind in der Form enthalten: $ds^2 = 2 \cdot F \cdot d\lambda\, d\mu$, wobei freilich der Factor F je nach dem bei der Maassbestimmung zu Grunde gelegten ebenen Schnitt verschieden ist. Nach der gewöhnlichen Formel würde man ein Bogenelement:

$$ds^2 = E\,d\lambda^2 + 2\,F\,d\lambda\,d\mu + G\,d\mu^2 \text{ erwarten.}$$

Es ist daher hier $E = G = 0$ zu setzen; dies besagt nichts anderes, als dass die Linien $\lambda = \text{const.}$ und $\mu = \text{const.}$ die Linien ohne Länge sind, wie wir schon wissen. Wenn wir nun den Winkel berechnen, unter dem sich 2 Curven auf der Fläche schneiden, so finden wir, dass derselbe von dem F, worin gerade die verschiedenen Maassbestimmungen

sich unterscheiden, unabhängig wird. Es ist allgemein:

$$\cos.\varphi = \frac{E\,d\lambda\,\delta\lambda + 2F(d\lambda\,\delta\mu + \delta\lambda\,\delta\mu) + G\,d\mu\,\delta\mu}{\sqrt{(E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda\,d\mu + G\,d\mu^2)\cdot(E\,\delta\lambda^2 + 2F\,\delta\lambda\,\delta\mu + G\,\delta\mu^2)}}.$$

Setzen wir hierin $E = G = 0$, so hebt sich F heraus, und es bleibt:

$$\cos.\varphi = \frac{d\lambda\,\delta\mu + \delta\lambda\cdot d\mu}{\sqrt{d\lambda\,d\mu\,\delta\lambda\,\delta\mu}}.$$

Geometrisch ausgesprochen heißt dies:

„Alle unsere Maßbestimmungen ergeben für den Winkel zweier Fortschreitungsrichtungen auf unserer Fläche je denselben Betrag, nämlich $\frac{i}{2}\cdot$ lg. desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Fortschreitungsrichtungen mit den durch ihren Schnittpunkt hindurchlaufenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche bilden."

oder anders ausgedrückt:

„Alle von uns auf der Fläche construierten Maassbestimmungen sind zu einander conform."

Wir erkennen hieraus zugleich:

„Wenn es auch wahr ist, daß wir auf den Flächen 2ten Grades ohne Festhaltung eines ebenen Schnittes noch keine Maassgeometrie haben, so können wir doch von vornherein auf den Flächen 2ten Grades von dem Winkel sprechen, welchen 2 Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden."

Ovale Flächen 2. Grades.

Wenden wir uns nun zu den ovalen Flächen zweiten Grades. Ich möchte hier zunächst einige Citate über eigene frühere Arbeiten geben, die in den Jahren 1872–75 entstanden sind; in ihnen habe ich mich bestrebt, die Funktionentheorie in möglichst lebendige Beziehung zur projektiven Geometrie zu setzen. Es ist hier zu erwähnen:

das Erlanger Programm vom Jahre 1872 (Note N° 78), Erlanger Berichte 1873: „Note über den Pascal'schen Satz."

Ich habe hierin eine Uebertragung des Pascalschen Satzes auf die Raumgeometrie gegeben, die im wesentlichen darauf beruht, anstatt reelle Werte von λ auf dem Kegelschnitt, die komplexen Größen $x + iy$ auf der Kugel zu deuten. Diese Arbeit findet sich wieder abgedruckt in den Mathem. Annalen Bd. 22. (1883).

Ferner ist zu nennen:

Mathem. Annalen Bd. 9. (1875): „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich."

In Verbindung damit erwähne ich die Dissertation von Wedekind,*) die im Auszuge in den Annalen Bd. 9. (1875.) mitgeteilt ist: „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen."

*) Erlangen. 1874.

Ich werde bald auf die dort gegebene Definition des Doppelverhältnisses von 4 Punkten auf der Kugel zurückkommen.

Wir wollen unseren Betrachtungen zunächst eine Kugel zu Grunde gelegt denken, die durch die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{gegeben sei.}$$

Wir setzen, wie bereits früher

$\lambda = \frac{x+iy}{1-z}$, wo λ der Parameter der Erzeugenden erster Art ist. Was den Parameter μ der Erzeugenden zweiter Art angeht, so schreiben wir:

$\mu = \frac{x-iy}{1-z}$. Wir könnten auch den reciproken Wert wählen, doch ziehen wir die hier gegebene Definition von μ vor, da sie uns den Satz liefert:

„Die beiden imaginären Erzeugenden erster und zweiter Art, die durch denselben reellen Punkt der Kugel laufen, haben konjugiert imaginäre Parameterwerte λ und μ."

Nun betrachten wir gleich die Collineationen:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \qquad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}.$$

„Wollen wir nun reelle Collineationen des Raumes haben, so müssen wir offenbar die λ und μ

konjugiert imaginären Substitutionen unterwerfen, was aber doch 6 fach ∞ viele reelle Collineationen giebt, da von den 4 Verhältnißgrößen $\alpha \beta \gamma \delta$, nachdem wir eine derselben gleich 1 gesetzt haben, die anderen drei beliebige komplexe, also 2 = teilige Werte annehmen können."

„Bei dieser Beschränkung auf das Reelle kommen natürlich die einfachen Collineationen, die wir Schiebungen nannten, jetzt, bei den ovalen Flächen in Wegfall."

Wir bezeichnen die reellen Collineationen weiterhin mit:

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta}\,; \quad \mu' = \frac{\bar{\alpha} \mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} \mu + \bar{\delta}}\,,$$ wo die $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ die zu den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

conjugiert complexen Größen sein mögen. Diese Collineationen der ovalen Flächen in sich werden nun geometrisch für uns die größte Bedeutung sein. Wir werden nämlich eine nicht = Euklidische Maassbestimmung des Raumes auf die ovalen Flächen gründen, und jene ∞^6 reellen Transformationen sind dann die Bewegungen des Raumes in dieser so definierten nicht = Euklidischen Geometrie. Diese nicht-Euklidische Geometrie, welche sich auf eine Ovalfläche gründet, bei welcher wir dann die Punkte des Inneren hauptsächlich betrachten werden

wir in Uebereinstimmung mit dem Wintersemester hyperbolisch, da jede Gerade im Inneren 2 ∞ ferne Punkte bekommt. Die andere Geometrie hingegen, welche mit den nullteiligen Flächen 2ten Grades arbeitet, nennen wir elliptisch und die dritte, welche sich auf eine ringförmige Fläche zweiten Grades stützt, lassen wir ohne Benennung, weil das ihr zugehörige Quadrat des Bogenelementes eine indefinite quadratische Form der Differentiale der Coordinaten ist.

Im vorliegenden Falle, wo wir es mit den ovalen Flächen zu thun haben, ist dann jeder Bewegung im hyperbolischen Raume eine solche Substitution der λ und μ, wie oben angegeben, zugeordnet und umgekehrt. Es ergiebt sich daher hierbei eine eindeutige Beziehung der Bewegung der hyperbolischen Maaßgeometrie auf die allgemeine, d. h. mit complexen Veränderlichen ausgestattete, lineare Substitution einer Veränderlichen λ.

Diese Beziehungen haben nun funktionentheoretisch eine große Tragweite; es wird dies sofort hervortreten, wenn wir dazu übergehen, das Programm weiter fortzuführen, das wir im vorigen Wintersemester aufstellten, in Betreff solcher eindeutiger Funktionen, die durch lineare Substitutionen in sich übergehen, d. h. der automorphen Funktionen. (v. die Wintervorlesung, wie auch Math. Annalen IX, p. 185).

Für diese Funktionen gilt, wie wir wissen:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right),$$ für $k = 0, 1, 2 \ldots$, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im allgemeinen hier in Frage kommenden Falle complexe Größen darstellen. Um das Wesen dieser Substitutionen sich klar zu machen, wird dann die nicht-Euklidische Geometrie des hyperbolischen Raumes von großem Nutzen sein; indem diese uns einmal gestattet, jene Substitutionen als Verschiebungen und Drehungen des Raumes zu deuten, weiter aber auch uns gewisse Ausdrücke, wie Winkel, Abstand etc., zu benutzen an die Hand giebt.

Wir werden bald auf diese Gedanken zurückzukommen haben; wir wollen jedoch zunächst in unseren geometrischen Betrachtungen fortfahren.

Zunächst eine sehr selbstverständliche Bemerkung!

Jede solche Formelgruppe:

$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ oder auch:

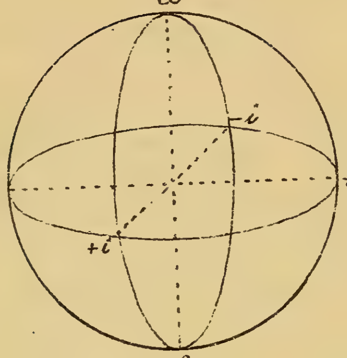
$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 \\
\rho x_2' &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 \\
\rho x_3' &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4 \\
\rho x_4' &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4 .
\end{aligned}$$

kann in doppelter Weise gedeutet werden, einmal

indem man das Coordinatensystem festhält, dagegen eine Umformung des Raumes annimmt. — In diesem Falle ordnet man jedem Punkte des Raumes einen anderen Punkt desselben zu — oder aber indem man den Raum mit seinen Punkten festhält, dagegen sich das Coordinatensystem umformen läßt. Jeder Punkt des Raumes alsdann, der jetzt die Coordinaten x' hat, hatte nach dieser zweiten Auffassung vorher die Coordinaten x. Dieser doppelten Auffassung werden wir gerecht, indem wir die Coordinaten eines Raumpunktes als eine relative Beziehung desselben zu dem Coordinatensystem bezeichnen.

Schließen wir uns nun einmal dieser letzten Auffassung an. Wir hatten bisher auf der Kugel unser λ in ganz bestimmter Weise gedeutet. Es war für den Nordpol $\lambda = \infty$, für den Südpol $\lambda = 0$; durch beide Punkte lief ein Meridian der reellen Zahlen, dessen Schnitt mit dem Aequator dann die Punkte ± 1 lieferte; Der zu dem Meridian der reellen Zahlen senkrechte Meridian stellte die rein imaginären Zahlen dar, dessen Schnitt mit dem Aequator ergab die Punkte $\pm i$. Wenn wir dann durch unsere Substitutionsformeln ein neues Coordinatensystem einführen, so werden wir die Punkte $0\,1\,\infty$ in ganz

Fig. 19.



beliebige Stellen auf der Kugel bringen können.

„Beim allgemeinen Coordinatensystem liegen daher die Punkte $0\,1\,\infty$ an drei beliebigen Stellen der Kugel. Dadurch ist das System aber auch festgelegt."

Nun ist die Frage, wie konstruieren wir von den drei Punkten $0\,1\,\infty$ in beliebiger Lage ausgehend die zu den übrigen Kugelpunkten gehörigen Coordinatenwerte *)? Wir sagen zunächst folgendermaßen: Weil es sich bei der linearen Substitution: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$; $\mu' = \frac{\bar\alpha\mu+\bar\beta}{\bar\gamma\mu+\bar\delta}$ doch schließlich um eine Collineation handelt, bei welcher unsere Kugel in sich übergeführt wird, so wird die Ebene des Meridians der reellen Zahlen in eine neue Ebene übergehen, der Meridian selbst in den Schnitt dieser Ebene mit einer Kugel, d.h. in einen Kreis übergehen.

---

*) Wir könnten die ganze Frage von der Kugel natürlich auch auf eine beliebige andere ovale Fläche übertragen, was wir im Texte der Kürze halber unberührt lassen.

Im neuen Coordinatensysteme werden daher die Punkte mit reellen Coordinaten auf demjenigen Kreise zu liegen haben, der durch die Punkte $0\infty1$ hindurchgeht.

Da nun diese Kreislinie mit dem ursprünglichen Meridian der reellen Zahlen reell projektiv ist, so werden wir in der Weise des Wintersemesters die ganze Werteverteilung der reellen Zahlen längs der Kreislinie konstruieren können, indem wir von dem einmal gewählten 01∞ ausgehend immer wieder den 4ten harmonischen Punkt konstruieren. So finden wir zunächst den Punkt -1 als den harmonischen Punkt zu 01∞ u.s. fort.

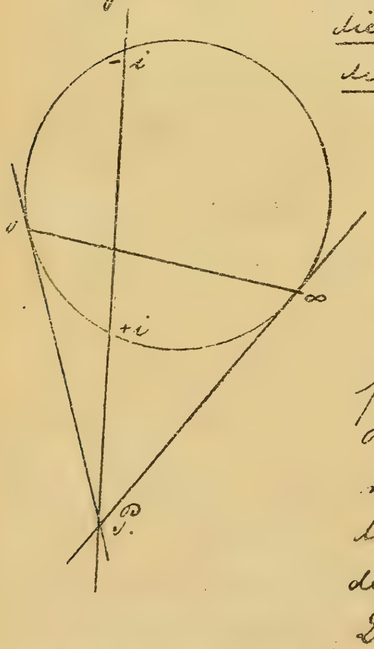
Hierbei ergiebt sich nun ein bestimmter Punkt des Raumes, der dem Mittelpunkt der ersten Kugel entspricht.

Wir erhalten ihn einfach als Schnittpunkt der Verbindungslinien von -1 mit $+1$ und von 0 mit ∞ und nennen ihn das „Centrum des neuen Coordinatensystems." Wir erkennen zugleich:

„Centrum eines neuen Coordinatensystems auf der Kugel kann jeder Punkt des Kugelinnern sein und der zugehörige Kreis der reellen Zahlen durch jede durchs Centrum hindurchgehende Ebene ausgeschnitten werden."

Wenn Centrum und Ebene des Kreises der reellen Zahlen beliebig angenommen ist, so kann man außerdem noch etwa den Punkt 0 auf der Peripherie des betreffenden Kreises beliebig wählen, im übrigen ist dann das Coordinatensystem bestimmt. Um z. B. die Punkte ±i zu finden, sucht man den Pol der Ebene der reellen Zahlen und verbindet ihn mit dem Centrum.

Fig. 20.



Die Punkte ± i erscheinen dann als die Schnitte unserer Kugel mit dieser Verbindungslinie.

Noch genauer können wir die Lage der complexen Werte auf der Kugel studieren, wenn wir uns vertraut machen mit der Bedeutung des „Doppelverhältnisses" für vier beliebige Punkte der Kugel. Haben diese 4 Punkte die Coordinaten a, b, c, d, so verstehen wir doch als Doppelverhältnis derselben den Ausdruck:

$D. V. = \frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$. Dieses D. V. ist ganz unabhängig von der speciellen Wahl des Coordinatensystems. Fragen wir uns jedoch, wie wir das Doppelverhältnis $\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$ von 4 Punkten der

Kugel am einfachsten nun auch projektivisch definieren können?

„Diese Frage nach der Bedeutung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten ist für uns von früher her nur für den Fall vorweg erledigt, wo das Doppelverhältnis reell wird, indem die 4 Punkte einem und demselben Kugelkreise angehören."

Es handelt sich da nämlich um das Doppelverhältnis von 4 Punkten eines Kreises, wie es ihnen in der gewöhnlichen synthetischen Geometrie beigelegt wird. *); wir ziehen bekanntlich, um dasselbe zu berechnen, von irgend einem Punkte des Kreises aus 4 Strahlen nach jenen Punkten, deren Doppelverhältnis uns das Doppelverhältnis der 4 Punkte liefert. Die Frage nach dem Doppelverhältnis von 4 beliebigen Punkten ist nun gerade die Aufgabe, die Wedekind in seiner (pag. 146 erwähnten) Dissertation behandelt hat. Wir werden bald näher hierauf einzugehen haben. Vorerst wollen wir noch bemerken, um die Betrachtung von pag. 150. abzuschließen:

*) Denn wir können den Kreis zum Kreis der reellen Zahlen unseres Coordinatensystems machen, worauf wir auf ihm dasselbe Gesetz der Werteverteilung von z haben, wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die nur reelle Werte des Parameters z kennt.

Wenn wir als die Punkte a, b, c die Punkte $0, \infty, 1$ wählen, außerdem $d = \lambda$ setzen, so wird das Doppelverhältnis der 4 Punkte $DV = \lambda$ werden.

„Kennen wir daher die Definition des komplexen Doppelverhältnisses, so werden wir die Coordinaten λ, welche irgend ein Kugelpunkt d in irgend einem unserer Coordinatensysteme bekommt, als das Doppelverhältnis definieren können, welches dieser Punkt d mit den 3 Coordinatengrundpunkten $0\ \infty\ 1$ bildet."

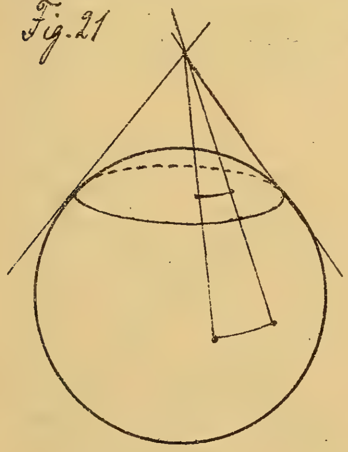
Ehe wir nun auf die Definition des komplexen Doppelverhältnisses eingehen, wollen wir auf die Kugel übertragen, was wir über die nicht-Euklidische Geometrie„ auf "den ringförmigen Flächen 2ten Grades in der vorigen Vorlesung gesagt hatten. Jene Betrachtungen haben offenbar allgemeine Bedeutung. Um auf einer Fläche 2ten Grades eine Maassbestimmung festzulegen, müßen wir, wie wir sahen, die 6 fach ∞ vielen Collineationen der Fläche in sich beschränken dadurch, daß wir einen Punkt festhalten, der im Allgemeinen nicht auf der Fläche gelegen sein wird. Dann stimmt die Maassgeometrie auf der Fläche überein mit der Maassgeometrie„ in "diesem Punkte, indem man als Fundamentalkegel den von diesem Punkte an die Fläche 2ten Grades zu legenden Kegel annimmt. Bei den ovalen Flächen, als deren

Typus wir die Kugel wählten, haben wir dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1.) Wenn der festgehaltene Punkt außerhalb der Kugel liegt und daher seine Polarebene die Kugel in einem einteiligen Kreise schneidet, so haben wir es mit der hyperbolischen Maaßbestimmung in jenem Punkte zu thun, die wir dann einfach durch Projektion auf die Kugel übertragen.

Als Entfernung zweier Punkte der Kugel definieren wir also den nicht-Euklidischen Winkel, unter dem jene Punkte von dem festgehaltenen Punkte aus gesehen werden, etc.. Man hat dann jedoch noch die Wahl, ob man auf der einen oder der anderen Kugelkalotte operieren will. Die kürzesten Linien auf der Kugel werden selbstverständlich von denjenigen Kreisen gebildet, deren Ebenen durch unseren Pol hindurchgehen.

Fig. 21



2.) Halten wir dagegen einen Punkt im Innern der Kugel fest, so hat zwar auch dieser eine reelle Polarebene, der Schnittkreis aber und damit der Fundamentalkegel sind imaginär. Wir haben es

daher mit der elliptischen Geometrie des Strahlenbündels zu thun, die sich aber nicht etwa eindeutig auf 2 getrennte Kalotten der Kugel, sondern zweideutig auf die Gesammtkugel überträgt. Kürzeste Linien sind jetzt wieder diejenigen Kreise, deren Ebenen durch den Pol hindurchgehen.

3.) Den Uebergangsfall bildet die parabolische Maassgeometrie auf der Kugel, welche sich ergiebt, wenn der festgehaltene Punkt auf der Kugel selbst liegt. Dieser Fall wird sich durch einen Grenzübergang aus dem vorigen erledigen.

Figur 22.

„Diese dreierlei Maassbestimmungen auf der Kugel sind uns in specieller Form schon im Wintersemester begegnet." *)

ad.1. Während nämlich im allgemeinen Falle der hyperbolischen Maassbestimmung auf der Kugel der festbleibende Punkt beliebig außerhalb der Kugel angenommen wird, war das Beispiel der hyperbolischen Maassbestimmung, welches wir damals hatten, dadurch specialisiert, daß wir als festbleibende Ebene die Aequatorebene nahmen und

*) v. die Wintervorlesung.

also als festbleibenden Punkt einen ∞ weiten Punkt des Raumes. In der That hatten wir damals die Maassbestimmung auf der Kugel gewonnen, indem wir dieselbe durch orthographische Projektion auf die Aequatorebene oder auf eine Parallelebene zu ihr bezogen. (v. Fig. 23.).

ad. 2. Ein Beispiel der elliptischen Maassbestimmung entstand, indem wir statt eines beliebigen Punktes des Kugelinnern den Mittelpunkt der Kugel festhielten, worauf eben die elementare sphaerische Maassgeometrie entsteht. Die feste Polarebene ist dann die ∞ ferne Ebene des Raumes. (v. Fig. 24.).

ad. 3. Bezüglich der parabolischen Maassbestimmung war derjenige Fall bevorzugt, bei welchem der festbleibende Kugelpunkt auf der Kugel der höchst gelegene ist.

Wir hatten die Kugel damals durch stereographische Projektion auf die mit parabolischer Maassbestimmung ausgestattete Aequatorebene oder eine Parallelebene zu ihr bezogen und so die parabolische Maassbestimmung auf der Kugel gewonnen. (v. Fig. 25.).

Indem wir die Kugel auf gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten bezogen, hatten wir für die

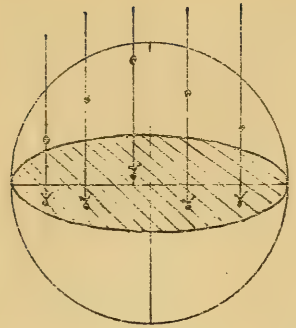


Fig. 24.

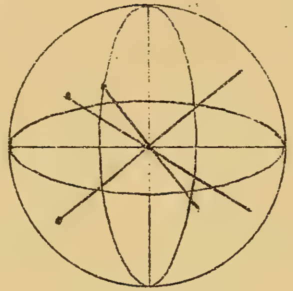


Fig. 23

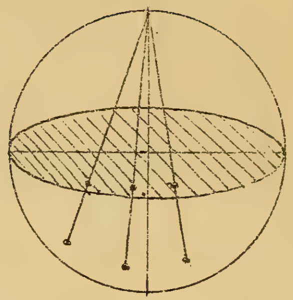


Fig. 25.

Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3, Ausdrücke erhalten, an die wir uns doch auch erinnern wollen.

Die Gleichung der Kugel sei $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

Dann ist:

1.) bei der <u>hyperbolischen</u> Maassbestimmung des Wintersemesters:

$$ds_1 = \frac{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}}{\zeta},$$

2.) bei der <u>elliptischen</u> Maassbestimmung:

$$ds_2 = \sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2},$$

3.) bei der <u>parabolischen</u> Maassbestimmung:

$$ds_3 = \frac{2\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}}{1-\zeta}$$

Setzen wir jetzt nach pag 143:

$\lambda = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$; $\mu = \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta}$, so wird unter Berücksichtigung von $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ umgekehrt:

$$\xi = \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda\mu}; \quad \eta = \frac{\lambda-\mu}{(1+\lambda\mu)\, i}; \quad \zeta = \frac{\lambda\mu-1}{1+\lambda\mu}$$

und unsere Formeln gehen bei dieser Substitution über in

$$ds_1 = \frac{2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}}{\lambda\mu - 1} \qquad ds_2 = \frac{2\cdot\sqrt{d\lambda\cdot d\mu}}{\lambda\mu+1}$$

$ds_3 = 2\sqrt{d\lambda\cdot d\mu}$, wo $\sqrt{d\lambda\cdot d\mu}$ immer durch eine bilineare Verbindung der λ, μ dividiert ist.

Wir erkennen hieraus:

„Wenn man die Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 des Wintersemesters durch λ und μ ausdrückt, so entstehen in der That Formeln, welche Spezialfälle derjenigen sind, die wir in der vorigen Stunde für die nicht = Euklidische Geometrie auf einer Fläche 2ten Grades aufgestellt haben."

Berücksichtigen wir dann die Entwicklungen auf pag. 148 ff., so ergiebt sich weiter:

„Diese Formeln für ds_1, ds_2, ds_3 lassen sich für unseren allgemeinen Fall verwenden, wenn wir uns nur die Coordinaten $\lambda\mu$ jedesmal in zweckmässiger Weise eingeführt denken."

Was haben nun alle diese Maassbestimmungen auf der Kugel gemeinsam? Ja, in allen drei

berechnet sich offenbar der Winkel, welchen zwei Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden, gleich, und zwar wird gemäß unserer früheren Formel:

$$\cos.\varphi = \frac{d\lambda\cdot\delta\mu + \delta\lambda\, d\mu}{\sqrt{d\lambda\cdot\delta\mu}\cdot\sqrt{\delta\lambda\, d\mu}}.$$

„Alle unsere Maassbestimmungen sind also conform.“

„Wir können den Winkel, welche zwei Fortschreitungsrichtungen δ und d einschließen, auch noch definieren, daß wir sagen: $\varphi = \frac{i}{2}\cdot\log. DV$, wo DV das Doppelverhältnis ist, welches die Fortschreitungsrichtungen d und δ mit den beiden imaginären Geraden bilden, die auf der Kugel durch den betreffenden Punkt hindurchlaufen.“

Diese Winkelbestimmung auf der Kugel ist alsdann die gewöhnliche der Euklidischen Geometrie, da ja in den betrachteten Maaßbestimmungen auch die gewöhnliche Sphaerik eingeschlossen ist. *). —

*) Wollen wir doch noch besonders hervorheben, daß zwei conjugierte Ebenen, d.h. zwei Ebenen, von denen die eine durch den Pol der anderen geht, sich auf der Kugel rechtwinklig schneiden. Daher schneiden beispielsweise (p. 153) die sämmtlichen kürzesten Linien einer hyperbolischen Maassbestimmung auf der Kugel den zugehörigen Grenzkreis rechtwinklig.

Nach diesem Exkurs kehren wir zur Wedekindschen Frage der Definition des Doppelverhältnisses für 4 Punkte der Kugel zurück.

Wenn wir 4 Punkte auf der Kugel haben und uns fragen, welche geometrischen Beziehungen derselben zu einander besonders dem Messen zugänglich sind, so werden dies offenbar nicht die Entfernungen der Punkte von einander sein, da diese ja bei hyperbolischer Maassbestimmung des Raumes ∞ werden, wohl aber bietet sich als besonders zweckmäßig die Winkelbestimmung auf der Kugel dar. Legen wir nämlich durch je drei der vier Punkte einen Kreis, so werden die Winkel, welche die entstehenden 4 Kreise A, B, C, D.*) an jenen Punkten mit einander bilden, unveränderliche Elemente der Figur sein. Wenn wir die 4 Punkte durch Collineation beliebig auf der Kugel verschieben, so bleiben die Winkel jener Kreise stets dieselben. Man kommt daher auf den Gedanken, diese Eigenschaft der Winkel zur Definition des Doppelverhältnisses der 4 Punkte a, b, c, d zu benutzen. Die Ausführung dieses Gedankens ist der wesentliche Inhalt der Wedekindschen Abhandlung. Vgl. Math. Ann. 9. pag. 211. Dort giebt Wedekind schließlich für unser Doppelverhältnis

$$\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$$ folgende Bedeutung:

*) Hierbei bezeichnet A den Kreis, der den Punkt a nicht enthält; entspr. B, C, D.

Es ist zunächst eine bestimmte Richtung festzulegen, in der jeder Kreis durchlaufen wird. Mit sin. $(AC)_d$ bezeichnet Wedekind dann denjenigen Winkel, welcher die um den Punkt d nötige Drehung misst, um die positive Richtung des Kreises A in die positive Richtung des Kreises C überzuführen. Das D.V. der 4 Punkte wird dann

$$= \frac{\sin.\,(BC)_d}{\sin.\,(AC)_d} \cdot e^{+i(AB)_d}.$$

Dieser Wedekindsche Ausdruck für das Doppelverhältnis versagt freilich in dem zumeist interessierenden Falle, wo die 4 Punkte in einer Ebene liegen. Alsdann fallen die 4 Kreise zusammen, alle in Betracht kommenden Winkel werden gleich 0. Jener Ausdruck nimmt daher die Gestalt an $\frac{0}{0}$, kann aber dann durch Grenzübergang in die gewöhnliche Form der synthetischen Geometrie übergeführt werden. (Näheres v. in der genannten Abhandlung.)

Wir wollen übrigens noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass die so gegebene Definition des D.V. ganz allgemein gilt, unabhängig von der spec. Maassgeometrie, in welcher wir auf der Kugel unsere Winkel messen.

Wir wollen heute die reelle Geometrie auf der reellen Kugel (die wir ein für allemal als Typus

der Ovalflächen wählen) behandeln, wobei wir unsere Entwickelungen auf die jedesmalige „<u>Gruppe</u>" gründen, die wir den Umformungen zu Grunde legen. Ein kurzer Ueberblick zeigt uns, dass wir <u>vier</u> Gruppen kennen, die wir in Betracht ziehen können.

a.) Die allgemeinste Gruppe, welche die übrigen drei umfasst, ist gegeben durch die Substitution (v. pag. 144):

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}; \quad \mu' = \frac{\bar\alpha\mu+\bar\beta}{\bar\gamma\mu+\bar\delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige komplexe Werte annehmen können. Es gaben uns diese Formeln, wie wir wissen, die Gesammtheit der reellen Collineationen des Raumes, die unsere Kugel in sich überführen. [<u>Projektive Geometrie auf der Kugel.</u>].

b.) Wir betrachten ferner nur diejenigen Substitutionen, bei denen ein bestimmter Punkt ausserhalb der Kugel festgehalten wird. Dies liefert uns bekanntlich die hyperbolische Maassbestimmung auf der Kugel; die Kugel selbst spaltet sich in zwei Kalotten durch den Berührungskreis des von dem festen Punkte an die Kugel gelegten Kegels.

c.) Wird ein Punkt <u>auf</u> der Kugel festgehalten, so haben wir die parabolische Maassbestimmung auf der Kugel.

d.) Liegt endlich der festgehaltene Punkt <u>im Innern</u> der Kugel, so liegt der Fall der elliptischen Maassbestimmung vor

vor, wohin auch die gewöhnliche Sphaerik gehört.

Diese vier Arten der Geometrie auf der Kugel wollen wir nun im einzelnen besprechen.

Fragen wir uns vorab, wie muss eine Gleichung: $f.(\lambda,\mu)=0$ beschaffen sein, damit sie eine reelle Curve vorstellt, d.h. eine Curve, die in gewöhnlichen Coordinaten geschrieben reelle Coefficienten ergiebt? (Es ist also nicht nötig, dass die Curve einen <u>reellen Linienzug</u> darstellt.) Erinnern wir uns an die Formeln, welche den Zusammenhang von λ und μ mit den Coordinaten x, y, z ergeben (pag. 143), so ergiebt sich leicht:

<u>„Reelle Curven werden im Coordinatensystem durch solche Gleichungen vorgestellt, welche ungeändert bleiben, wenn ich innerhalb der Coefficienten $+i$ mit $-i$ vertausche und dann noch λ mit μ umwechsele."</u>

Eine reelle bilineare Gleichung z.B. muss hiernach die Form haben:

$A.\lambda\mu+(B+iC)\lambda+(B-iC)\mu+D=0$. Diese Gleichung stellt also einen reellen ebenen Schnitt der Kugel dar, d.h. den Schnitt mit einer reellen Ebene, mag dieser nun einteilig oder nullteilig sein.

Algebraisch werden uns wieder die linken Seiten der Gleichungen interessieren, nachdem wir vielleicht homogen gemacht haben, wir können diese charakterisieren als „<u>doppelt binäre Formen</u>

mit konjugierten Coefficienten."

Betrachten wir nun insbesondere die Geometrie ad a.

Ad. a.) Wir haben dann eine solche Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ zu untersuchen gegenüber der Gruppe der Substitutionen:

$$\lambda_1' = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \; ; \quad \mu_1' = \bar{\alpha}\mu_1 + \bar{\beta}\mu_2 .$$

$$\lambda_2' = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \; ; \quad \mu_2' = \bar{\gamma}\mu_1 + \bar{\delta}\mu_2 .$$

Besonders wird verlangt, die Invarianten einer solchen Form f gegenüber diesen Substitutionen zu erforschen. Fragt man, was bisher über diese Invariantentheorie gearbeitet wurde, so ist zu sagen: Von Seiten der Algebristen*) ist gar nichts, seitens der Zahlentheoretiker wenig hierüber geschrieben. Unter den letzteren ist zu nennen:

Hermite, sur la théorie des formes quadratiques. Crelle Bd. 47.

Picard, Acta mathematica Bd. 1, 2 u. 5.

Diese wenigen Citate mögen hier genügen.

Wir können übrigens diese ganze Invariantentheorie auch in der Ebene $x + iy = \lambda$ deuten.

---

*) Die Algebristen machen über die Art der in ihren Formen vorkommenden Coefficienten keine Voraussetzung, die Zahlentheoretiker wählen die Coefficienten ganzzahlig; das ist der ganze Unterschied. Die Algebra erscheint hier als Vorstufe der Zahlentheorie.

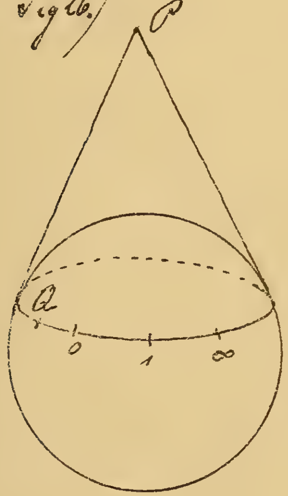
„Die allgemeine projektive Geometrie der Kugelfläche findet in der $x + iy$ = Ebene dann ihr Abbild, wenn ich die ebene Geometrie unter Zugrundelegung der Gruppe der reciproken Radien traktiere, d. h. derjenigen Gruppe, welche die gewöhnlichen Bewegungen umfasst, die Ähnlichkeitstransformation, die Spiegelung und die eigentlich sogenannte Inversion durch reciproke Radien."
(vgl. Erlanger Programm §. 6, vgl. auch die Berichtigung in der italienischen Uebersetzung von 1890.)

Ad. b. Wir wollen uns hier zuerst über die zugehörige Gruppe orientieren. Welche Gruppe von Umänderungen ist noch zulässig, wenn ein Punkt außerhalb der Kugel festgehalten wird?

Der Kreis, in welchem der von dem festen Punkte an die Kugel gelegte Kegel diese berührt, muss in sich übergehen. Wir machen ihn zum Kreis der reellen Zahlen, indem wir auf ihm $0\,1\,\infty$ beliebig annehmen. Es werden dann nur solche Substitutionen: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ zulässig sein, bei denen reellen Werten von λ reelle Werte von λ' entsprechen, d. h. es müssen die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell sein. Es erleidet dann natürlich μ ganz dieselbe Substitution: $\mu' = \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$, weil doch der konjugierte Wert einer reellen Größe diese Größe selbst ist. Es werden daher λ und μ dann congredient,

und die Gleichung $\lambda - \mu = 0$ bleibt bei allen Substitutionen ungeändert. Dies ist eben die Gleichung des Berührungskreises. Wenn wir die so definierte Geometrie auf der Kugel dann bequem auf die Ebene projicieren wollen, so ist es zulässig, den Projektionspunkt Q auf dem Kreise der reellen Zahlen zu wählen (spec. den Punkt ∞) und als Ebene diejenige Ebene anzunehmen, welche dem Projektionspunkt in Bezug auf das Kugelcentrum diametral gegenüber liegt.

Fig. 26.)



Der Kreis der reellen Zahlen wird sich dann als Gerade projicieren, die wir als x = Axe zu wählen haben.

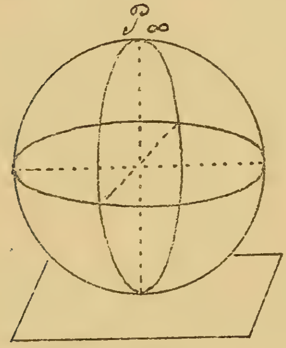
<u>Die unter sich identischen linearen Substitutionen von λ und μ mit reellen Coefficienten entsprechen dann den Bewegungen einer hyperbolischen Maszbestimmung in der $x + iy$ = Ebene, bei der die Punkte der x = Axe das ∞ Weite vorstellen und die Kreise, welche die x = Axe rechtwinklig schneiden, die geodätischen Linien sind.</u> Denn letztere sind die Projektionen der Kugelkreise, deren Ebene durch den

im Raum festgehaltenen Punkt hindurchgeht. (vgl. Anm. pag. 168.). Diese Art der Darstellung der hyperbolischen Geometrie haben wir übrigens ja im Wintersemester bereits ausführlich besprochen.

Ad. c. Wir wählen den auf der Kugel gelegenen festbleibenden Punkt als den Punkt ∞. Dann folgt, daß die hier in Betracht kommenden Substitutionen die Form haben müßen:

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta \;;\quad \mu' = \bar{\alpha}\mu + \beta.$$

Fig. 27.



In üblicher Weise auf die Ebene übertragen, ist dies bekanntlich die Gruppe, welche aus den Parallelverschiebungen, Drehungen und Aehnlichkeitstransformationen der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie besteht.*) Will ich mich aber auf solche Operationen beschränken, die die parabolische Maassbestimmung ungeändert laßen, so muß ich die Aehnlichkeitstransformationen im engeren Sinne ausschließen, dies bed.: daß $\alpha = e^{i\vartheta}$ zu setzen ist, d. h. es muß $|\alpha| = 1$ genommen werden.

---

*) Wir könnten diese Gruppe nach der allgemeinsten in ihr enthaltenen Transformationsart die Gruppe der „Aehnlichkeitstransformationen" nennen.

Ad d. Was sind es hier für lineare Substitutionen, denen ich λ unterwerfen darf, wo wir einen Punkt innerhalb der Kugel festhalten? Diese Substitutionen haben offenbar die Eigenschaft, dass in Bezug auf den festbleibenden Punkt diametrale Werte des λ wieder zu diametralen Werten werden.*)

„Wählt man daher den festbleibenden Punkt zum Centrum der Coordinatenbestimmung, so handelt es sich hier nur noch um diejenigen linearen Substitutionen, welche nach der Vorlesung, welche von den reellen Schiebungen einer nullteiligen F_2 in sich handelte, durch die Formeln geliefert wurden:

$$\lambda' = \frac{(A+iC)\lambda - (B-iD)}{(B+iD)\lambda + (A-iC)} \quad \text{und entspr.}$$

$$\mu' = \frac{(A-iC)\mu - (B+iD)}{(B-iD)\mu + (A+iC)}.$$

Wir wollen diese Substitutionen solche vom Quaternionentypus nennen aus einem jetzt darzulegenden Grunde.**)

---

*) Insbesondere werden also die beiden festbleibenden Punkte jeder einzelnen Substitution diametrale Werte sein.

**) der natürlich aufs Engste zusammenhängt mit der früher für die „Schiebungen" aufgestellten Quaternionenformel; wir verfolgen das im Texte nicht weiter.

Es ist eine erste Substitution des λ gegeben durch:

$$\lambda'_1 = (A + iC)\,\lambda_1 - (B - iD)\,\lambda_2.$$

$$\lambda'_2 = (B + iD)\,\lambda_1 + (A - iC)\,\lambda_2.$$

Ihre Determinante ist gleich $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$.

Eine zweite Substitution sei

$$\lambda''_1 = (A' + iC')\,\lambda'_1 - (B' - iD')\,\lambda'_2.$$

$$\lambda''_2 = (B' + iD')\,\lambda'_1 + (A' - iC')\,\lambda'_2.$$

Die Determinante ist gleich $A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$.

Nun wollen wir diese beiden Substitutionen hinter einander anwenden, wie drückt sich dann $\lambda''_1 + \lambda''_2$ durch λ_1 und λ_2 aus?

Es wird offenbar:

$$\lambda''_1 = \lambda_1 \cdot [(A' + iC')(A + iC) - (B' - iD')(B + iD)]$$
$$- \lambda_2 \cdot [(A' + iC')(B - iD) + (B' - iD')(A - iC)]$$

oder:

$$\lambda''_1 = \lambda_1 \cdot (A'' + iC'') - \lambda_2\,(B'' - iD'').$$

Entsprechendes ergiebt die Ausrechnung:

$$\lambda''_2 = \lambda_1 \cdot (B'' + iD'') + \lambda_2 \cdot (A'' - iC'').$$

Eine einfache Vergleichung läßt dann erkennen, daß:

$$\begin{array}{l|l}
A'' = AA' - BB' - CC' - DD'. & \\
B'' = AB' + A'B - CD' + C'D. & A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2 \\
C'' = AC' + A'C + DB' - D'B. & (A^2 + B^2 + C^2 + D^2). \\
D'' = AD' + A'D - BC' + B'C. & (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).
\end{array}$$

Auf Grund der Entwickelungen pag. 120 ergiebt sich dann, was wir darlegen wollten:

„Wir nennen eben unsere Substitutionen solche vom Quaternionentypus, weil zwei Substitutionen (ABCD) und (A'B'C'D') hintereinander angewandt sich gerade so kombinieren, wie man zwei Quaternionen multipliciert."

Im übrigen bedeutet natürlich jede solche Substitution eine Drehung der Kugel um das Centrum. Wir werden nun nach der Drehungsaxe und dem Drehungswinkel fragen. Bezeichnen wir mit φ den Drehungswinkel und mit ξ, η, ζ die Coordinaten des einen Endpunktes der Drehungsaxe, so haben wir, wenn wir den Kugelradius $= 1$ wählen:

$A = \varrho \cos\frac{\varphi}{2}$; $B = \varrho \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\eta$; $C = \varrho \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\xi$; $D = \varrho \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\zeta$ *);
wobei $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = \varrho^2$ wird.

Diese Formel findet sich abgeleitet und discutiert beispielsweise in meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 32-34." (Leipzig 1884).

Wir wollen die Betrachtungen der vier Arten der Geometrie auf der Kugel jetzt in soweit anwenden, daß wir eine Reihe von Bemerkungen funktionentheoretischen Charakters anknüpfen, die uns zeigen sollen, in welchen Fragen die Geometrieen in der

*) Man bemerkt, daß hier die Aufeinanderfolge der Buchstaben nicht glücklich gewählt ist; es wäre besser, A mit D zu vertauschen.

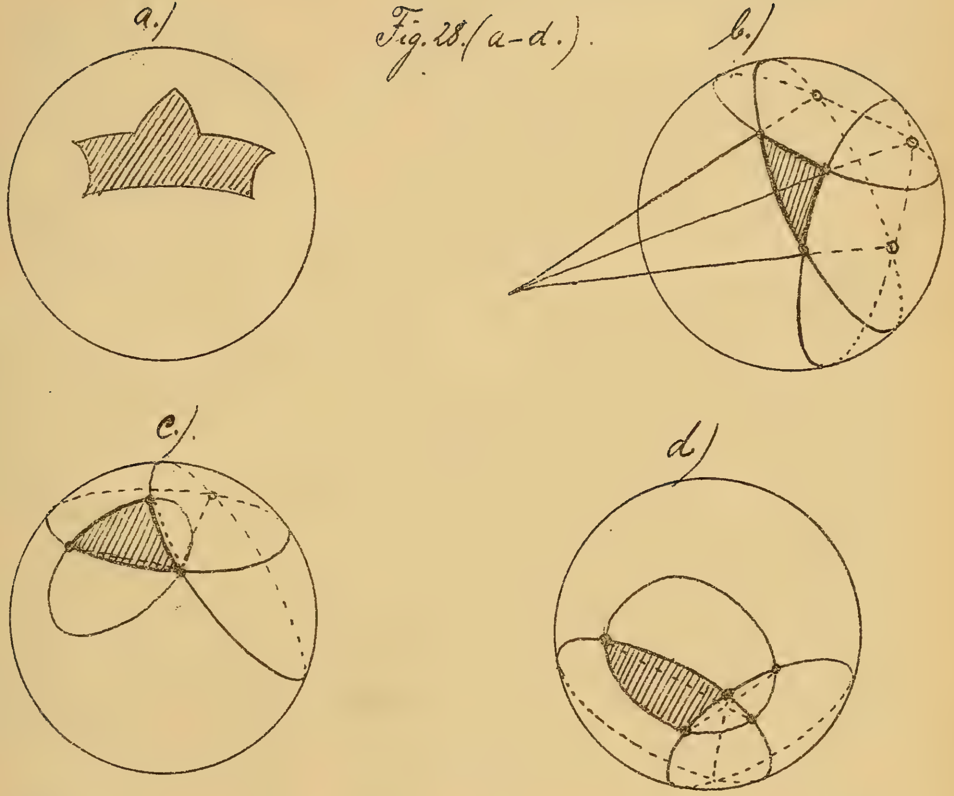
Funktionentheorie von Bedeutung werden. Es sind hier 2 Punkte zu erwähnen (die untereinander natürlich eng zusammenhängen) die Theorie der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung und die Theorie der automorphen Funktionen einer Veränderlichen, die wir jetzt beide im Einzelnen besprechen wollen.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung werden wir uns ganz allgemein mit bestimmten Kreisbogendreiecken oder Kreisbogenpolygonen zu beschäftigen haben, es sind dies Untersuchungen, welche anknüpfen an die Abhandlung: Schwarz, „zur Theorie der hypergeometrischen Reihe," Crelle Bd. 75." (1872.).

„Die Geometrieen b, c, d kommen in diesen funktionentheoretischen Untersuchungen alsdann zur Geltung, wenn man vom allgemeinen sphaerischen Dreieck zu handeln hat, dessen Seitenflächen sich entweder in einem Punkte ausserhalb der Kugel oder auf der Kugel oder im Innern der Kugel bezw. treffen werden."

„Wenn wir uns dagegen überhaupt mit sphaerischen Kreisbogenpolygonen beschäftigen, so wird die allgemeine projektive Geometrie a.) am Platze sein, es sei denn, daß sich zufälligerweise die Begrenzungsebenen des Polygons in einem einzigen Punkte schnitten, was auf die Geometrieen b, c, d hinführt."

Fig. 28. (a-d.)



Um dies etwas auszuführen: Man kann einem gewöhnlichen sphärischen Dreieck,*) wenn es auf der Kugel gezeichnet ist, gleich ansehen, ob es der einen oder der anderen Art angehört. Bezeichnen wir die drei Winkel desselben mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, so haben wir den Satz:

„Je nachdem bei einem solchen sphaerischen Dreieck

*) d. h. einem solchen ohne überstumpfe Winkel.

$\lambda + \mu + \nu \lesseqgtr 1$ ist, haben wir den Fall b, c oder d".

Indem wir so sagen, haben wir den Begriff des sphaerischen Dreiecks ganz in der Form der gewöhnlichen Geometrie gefasst.

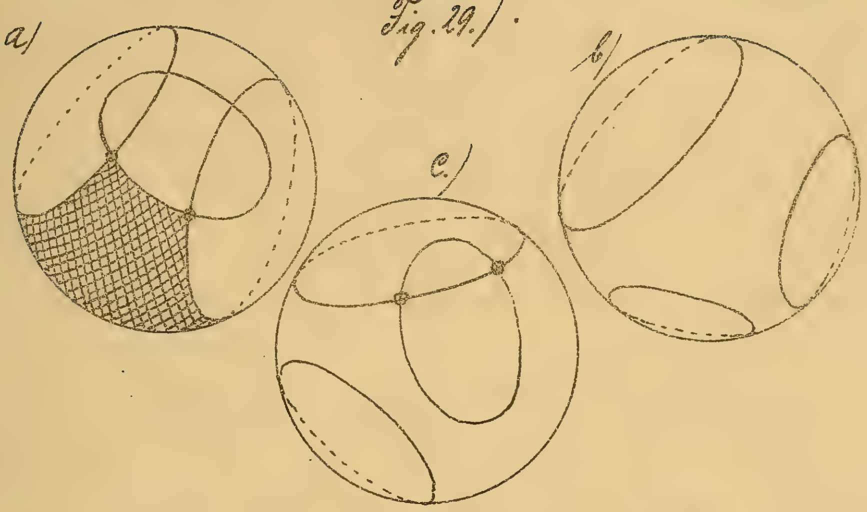
Allerdings werden wir später *) nicht blos elementare Dreiecke gebrauchen, bei denen λ, μ, ν sicher positiv und < 1 oder doch < 2 sind.

Wir werden auch sphaerische Dreiecke zu betrachten haben, bei denen Windungspunkte irgend welcher Multiplicitäten in den Ecken liegen; wir werden bald erkennen, wie ein solches Dreieck aussieht. Auch die Fälle werden wir heranzuziehen haben, wo geradezu einige Ecken fehlen, indem sich die zu den Ecken gehörigen Begrenzungskreise überhaupt nicht treffen, was bei negativen Werten der λ^2, μ^2, ν^2 vorkommt und natürlich zur Kategorie b hinführt. Statt in eine Ecke auszulaufen, windet sich ein derartiges Dreieck mit einem zwischen zwei festen Kreisen eingeschlossenen Bande endlos um die Kugel herum.

---

*) Nämlich in der parallellaufenden Vorlesung über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen; die λ, μ, ν sind uns dort als Exponentendifferenzen der P-Funktionen bereits bekannt!

Fig. 29.



Wir geben jetzt den in Aussicht gestellten Blick auf die Theorie der automorphen Funktionen.
Eine automorphe Funktion wird durch die Gleichung charakterisiert:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right), k = 0, 1, \dots$$

Wir haben es hier mit einer „durchaus discreten" Gruppe von Transformationen zu thun, indem evidenterweise die Coefficienten der Substitution nicht kontinuierliche Werte annehmen dürfen, auch keine unendlich kleinen Substitutionen vorkommen sollen. Doch werden offenbar die in Anwendung kommenden discreten Transformationen

jedesmal in einer kontinuierlichen Gruppe enthalten sein, und wir fragen uns daher: Was für discrete Gruppen von Transformationen sind bereits in der continuierlichen Gruppe c, d, b enthalten? Welche erst in a? Wir wollen die verschiedenen Fälle kurz einzeln besprechen, indem wir charakteristische Beispiele herausgreifen.

1.) In die Gruppe c werden alle Funktionen zu rechnen sein, die der Gleichung genügen:

$f(\lambda) = f(\lambda + \omega_k)$ $k = 0, 1 \ldots$. Es sind dies die einfach und doppelt periodischen Funktionen.

2.) Bei den Transformationen d soll ein Punkt des Kugelinnern fest bleiben, nehmen wir etwa der Einfachheit halber den Mittelpunkt. (Die betr. Transformationen sind also durch die gewöhnlichen Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt veranschaulicht.) Die hierher gehörigen Funktionen sind der eigentliche Gegenstand der „Vorlesungen über das Ikosaeder." Vgl. daselbst insbesondere pag. 36–42. Dort sind zunächst die sämmtlichen in Betracht kommenden Substitutionsgruppen angegeben. (Dieder, Tetraeder, Oktaeder u. Ikosaeder.). Es handelt sich also kurz um diejenigen rationalen Funktionen $f(\lambda)$, die bei den 60 Drehungen des Ikosaeders in sich ungeändert bleiben. Wir nennen solche Funktionen;

„fundamentale rationale Funktionen der regulären Körper." Eben diese Funktionen sind dann die zur Kategorie d.) gehörigen automorphen Funktionen.

3.) In der Kategorie b.) wird es sich um Funktionen handeln, die durch reelle Substitutionen in sich übergehen. Hierher gehören vor allen Dingen die elliptischen Modulfunktionen,*) die sich ergeben, wenn wir die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ der elliptischen Funktionen auffassen als eine Funktion des Periodenquotienten $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$. Diese bleiben ungeändert bei einer unendlichen Anzahl linearer Substitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, nämlich bei denjenigen Substitutionen, deren Coefficienten a, b, c, d reelle ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = 1$ sind.

4.) Zu b.) gehören weiter noch die Funktionen, auf die Poincaré 1881 die Aufmerksamkeit lenkte, und die er „fonctions Fuchsiennes" nannte. Entsprechend bezeichnet er die durch Substitutionen der Gruppe a in sich übergehenden Funktionen als „fonctions Kleinéennes." Ich habe schon im vorigen Wintersemester darauf hingewiesen, daß

*) vgl. die gleichzeitige Vorlesung über Differentialgleichungen und das im Drucke befindliche Werk von Fricke und mir.

ich diese Benennungen für nicht zweckmäßig gewählt halte, und man lieber auf Personal-bezeichnungen verzichten soll, zumal wenn sie leicht zu einer unrichtigen Auffassung über die Bedeutung der Arbeiten neben einander lebender Forscher Veranlassung geben können. Einmal hat Fuchs zwar in angrenzenden Gebieten, aber nicht eigentlich über die Funktionen b. gearbeitet, dann sind auch von anderen Forschern (Schwarz, Schottky, Riemann) wichtige Specialfälle der Funktionen b wie a bereits vorweg behandelt. Es wird wohl darauf verwiesen, daß auch die Benennung „Abelsche Funktionen" in ähnlicher Weise unrichtig eingeführt sei. Doch wenn Jacobi die von ihm untersuchten Funktionen zu Ehren von Abel als „Abelsche Funktionen" bezeichnet, so war dies eine freiwillige Selbstentsagung. Poincaré hat aber seine Bezeichnung ursprünglich gewählt, ohne die Literatur irgendwie genau zu kennen. Man könnte nun die bezeichneten Funktionen vielleicht Riemannsche Funktionen nennen, wie ich in Annalen 19, pag. 564 vorschlug (insofern die gesammte funktionentheoretische Denkweise, mit der wir arbeiten, wesentlich auf Riemann zurückgeht), doch hat dieser Vorschlag keinen Anklang gefunden und ich ziehe

daher die Benennungen: allgemein automorphe und reell automorphe Funktionen etc. vor. Das bisher Gesagte läßt sich alsdann kurz zusammenfassen:

„Den Gruppen a, b, c, d entsprechend wird man die automorphen Funktionen einteilen in allgemein automorphe Funktionen, in reell automorphe Funktionen, in periodische Funktionen im älteren Sinne (additiv automorphe Funktionen) und in die Funktionen der regulären Körper.“

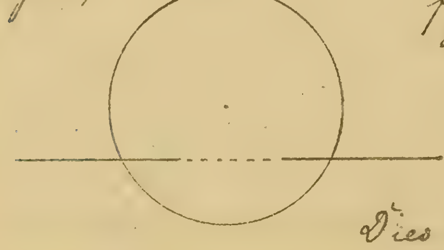
Soviel zur Orientierung auf diesem Gebiet. Nun müssen wir noch eine letzte Frage betreffend die Geometrie auf der Kugel beantworten, wobei wir dann aber wieder den Gesammtraum mit in Betracht ziehen wollen, d. h. die Collineationen dieses Raumes, welche die Kugel in sich verwandeln. Wir fragen uns, was bedeutet eigentlich die einzelne Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ auf der Kugel, und was für eine Art Bewegung des nicht Euklidischen Raumes, dessen Fundamentalfläche unsere Kugel ist, ist hierdurch gegeben? Wir haben früher gesehen, wenn man eine Fläche 2ten Grades in sich transformiert, (so zwar, daß die erzeugenden Schaaren nicht wechseln), so bleibt allemal ein Tangentialtetraeder fest. Da nun ein Tangential=

tetraeder bei der Kugel immer 2 und nur 2 reelle Ecken auf der Kugel hat, indem die in ihnen zu construierenden Tangentialebenen sich außerhalb der Kugel schneiden, so haben wir den Satz:

„Auf der Kugel werden bei jeder Bewegung allgemein zu reden 2 reelle Punkte festbleiben."

Die reelle Linie alsdann, welche die genannten beiden reellen Punkte verbindet, wird dann bei der Bewegung des Raumes in sich verschoben werden (so daß ihre Schnittpunkte mit der Kugel festbleiben), während der Raum sich um sie dreht; uns interessiert hierbei vom Standpunkte der Nichteuklidischen Geometrie aus besonders das Stück der Linie im Innern der Kugel. Diese Nichteuklidische Bewegung nennt man eine Schraubenbewegung. bei ihr fungiert die Verbindungslinie der beiden festbleibenden Punkte als Schraubenaxe.

(Fig. 30.)



Wir setzen nun, um die festbleibenden Punkte direkt zu bestimmen, in

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \quad \lambda'=\lambda, \text{ so folgt:}$$

$$\gamma\lambda^2+(\delta-\alpha)\lambda-\beta=0.$$

Dies liefert uns die Werte:

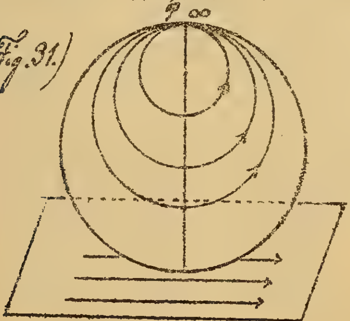
$$\lambda = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}$$ für die beiden festbleibenden Punkte.

Wir haben hier *) zunächst zu unterscheiden, ob die Quadratwurzel gleich null wird oder nicht. Wir kommen weiterhin zu den verschiedenen Arten der Substitution, wie sie beispielsweise in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" (Leipzig 1890) pag. 163 ff. ausführlich betrachtet werden.

Dort wird unterschieden zwischen der parabolischen, elliptischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitution. Die parabolische Substitution ist eben durch das Verschwinden des Wurzelausdruckes $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma$ definiert, bei ihr fallen die beiden festbleibenden Punkte zusammen.

Wählen wir im Falle der parabolischen Substitution den festbleibenden Punkt zum Unendlichkeitspunkt, $(\lambda=\infty)$, so können wir die Substitutionen, um welche es sich handelt, allemal auf die kanonische Form bringen: $\lambda' = \lambda + \beta$..

Fig. 31.)



Wenn wir dann in gewohnter Weise die Kugel auf die Ebene stereographisch projicieren

*) indem wir jetzt in die Einzeldiscussion eintreten.

(v. Figur), so handelt es sich in der Ebene um eine einfache Parallelverschiebung, wie sie durch die Gleichung gegeben ist:

$x' + iy' = x + iy + (b + ic)$. Was bedeutet dies dann auf der Kugel?

„Dem Umstande entsprechend, daſs ein System paralleler gerader Linien der gewöhnlichen Ebene sich in sich selbst verschiebt, verschieben sich auf der Kugel lauter Kreise in sich selbst (v. Fig. 31.), die sich in dem festbleibenden Punkte berühren." Wir ziehen jetzt die zugehörige Collineation des Gesammtraums in Betracht und finden in dieser Hinsicht:

„Innerhalb jeder durch einen solchen Kreis der Kugel hindurch gelegten Ebene durchläuft dabei jeder Punkt des Raumes einen bestimmten Horocyclus*) der zugehörigen nicht-Euklidischen Maassbestimmung und alle Horocyclen, die von den verschiedenen Raumpunkten so durchlaufen werden, werden wir als parallel bezeichnen dürfen, weil sie sich in demselben Punkte der absoluten Kugel berühren."

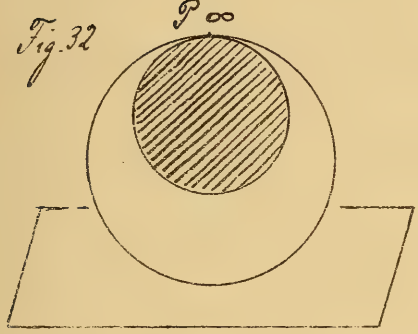
Dies also wäre die „parabolische" Bewegungsform unseres Nichteuklidischen Raumes. —

Wir haben jetzt weiter den Fall zu betrachten, wo zwei getrennte Wurzeln:

*) v. die Wintervorlesung.

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{(\alpha-\delta) \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma}$$

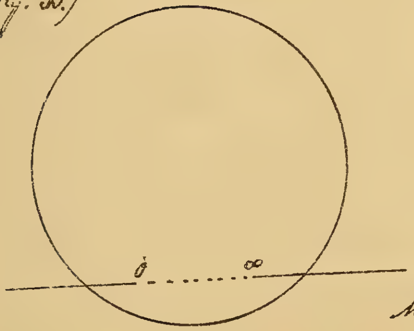
Fig. 32



für die bei der Substitution: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ festbleibenden Punkte sich ergeben. Es steht dann offenbar nichts im Wege, auf der Kugel ein neues Coordinatensystem einzuführen, der Art, daſs der 0= und der ∞=Punkt in die festbleibenden Punkte zu liegen kommen. Die lineare Substitution nimmt dann die kanonische Form an: $\lambda' = k\cdot\lambda$. Durch einfache Ausrechnung ergiebt sich alsdann für k der Wert:

$$k = \frac{\left(\alpha+\delta \mp \sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}\right)^2}{4\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)}.$$

Fig. 33.)



Die weitere Einteilung dieser allgemeinen Substitution $\lambda' = k\cdot\lambda$ erfolgt nun nach dem Werte, den die Konstante k annimmt. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden.

1.) Es habe k den Wert $e^{i\varphi} = \cos.\varphi + i \sin.\varphi$, d.h. sei $|k| = 1$. Dies ist der Fall der elliptischen Substitutionen.
2.) Es sei k reell. Dann reden wir von hyperbolischer Substitution.
3.) Es möge k beliebig komplex sein. Dieser allgemeinste Fall tritt für unser Interesse zurück, da wir ihn aus den beiden ersten Fällen zusammensetzen können. Wir nennen diese Substitution die loxodromische.

Wir können uns diese Substitutionen nun wieder klar machen, wenn wir unser λ zunächst wieder in der Ebene deuten und die hier sich darbietenden Verhältnifse dann auf die Kugel in bekannter Weise übertragen. Wir gehen unsere drei Fälle einzeln durch:
1.) Im ersten Falle war gesetzt: $\lambda' = e^{i\varphi}.\lambda$. In der Ebene bedeutet diese Substitution eine Drehung derselben; „die Trajektorien d.h. die Bahncurven der einzelnen Punkte der Ebene sind concentrische Kreise um den Nullpunkt." Wenn wir dies nun in gewöhnlicher Weise (v. Figur) auf die Kugel übertragen, so haben wir eine Drehung der Kugel um den Durchmesser 0∞ um den Winkel φ, wobei, wenn wir die Punkte $0, \infty$ als Pole auffassen, die

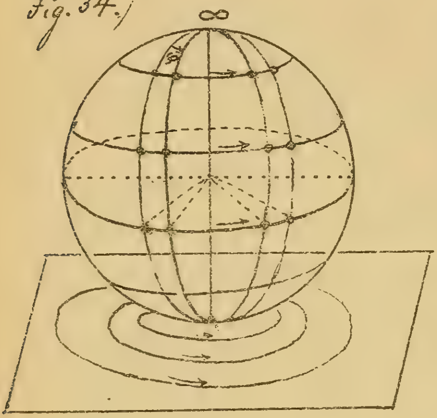
Breitenkreise die Trajektorien der einzelnen Kugelpunkte vorstellen. Dies übertragen wir nun leicht auf den Fall, wo die Punkte 0 und ∞ eine beliebige Lage auf der Kugel besitzen. Wir sehen sofort, was aus den Breitenkreisen wird, wenn wir uns erinnern, daß diese durch Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die unendlich weite Gerade der Horizontalebene, d.h. durch die konjugierte Polare des Durchmessers 0 ∞ hindurchgehen. An Stelle dieser Breitenkreise treten in unserem allgemeinen Fall dann diejenigen Kreise der Kugel, welche von Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die konjugierte Polare der jedesmaligen Axe 0 ∞ hindurchgehen. (Die konjugierte Polare der Axe 0 ∞ erhält man bekanntlich als Schnittgerade der beiden Tangentialebenen in den Punkten 0 ∞).

An Stelle der Meridiane treten diejenigen Kreise der Kugel, deren Ebenen durch die Axe 0 ∞ selbst hindurchlaufen. Die Bewegung der einzelnen Kugelpunkte ist hiernach folgende:

" Jeder Punkt der Kugel rückt unserer Substitution entsprechend auf dem durch ihn hindurchgehenden Breitenkreise ein solches Stück fort, daß der durch ihn hindurchgehende

Meridian um den Winkel φ gedreht erscheint."
(vergl. die beiden Figuren.).

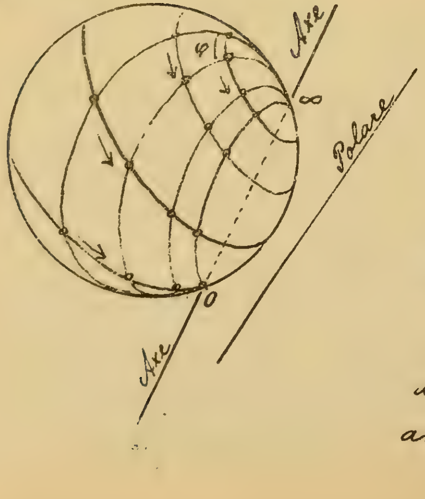
Fig. 34.)



Was für eine Bewegung des Gesammtraumes tritt nun gleichzeitig hier ein? Wir denken uns, wie in letzter Vorlesung, eine Kugelkalotte abgeschnitten längs eines Trajektorienkreises.

In der Ebene, die wir durch Schraffierung hervorgehoben haben, verschiebt sich dann offenbar der Trajektorienkreis in sich, während der Punkt im Innern, in welchem die Axe 0∞ die Ebene durchsetzt, fest bleibt. (Fig 35)

Fig. 35.)

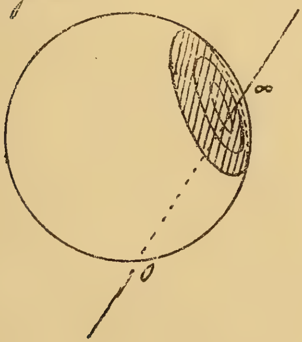


Eine solche Collineation der Ebene in sich ist uns aber bereits bekannt vom Wintersemester her, sofern wir den Trajektorienkreis als absoluten Kegelschnitt ansehen, wir wissen, welche

Curve jeder Punkt der Ebene hierbei beschreibt, nämlich einen Nichteuklidischen Kreis. Wir wollen die der Art sich ergebende Nichteuklidische Bewegung als Rotation des Raumes um eine Axe bezeichnen. Wir haben daher als Schlußergebnis zusammen=gefasst:

„Die einer elliptischen Substitution von λ entsprechende nicht=Euklidische Bewegung ist eine Rotation des Raumes um die das Kugelinnere durchsetzende Axe $\infty 0$, bei welcher jeder Punkt der Axe festbleibt und jeder andere Raumpunkt einen Kreis (im nicht=Euklidischen Sinne) beschreibt, welcher in derjenigen Ebene liegt, die durch ihn (den Raumpunkt) und die Polare der Axe hindurchgeht."

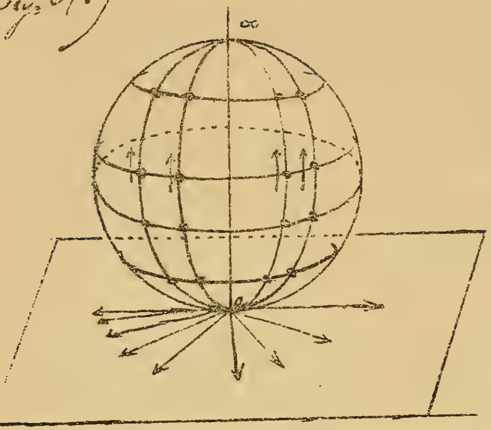
Fig. 36.)



2.) „Wir gehen nun zur hyperbolischen Substitution über: $\lambda' = k \cdot \lambda$, wo k reell ist.

„In der λ=Ebene haben wir hier einfach eine Aehnlichkeitstransformation, bei welcher die Ebene vom Coordinatenanfangspunkt als festem Punkt aus auf das k=fache gestreckt wird.

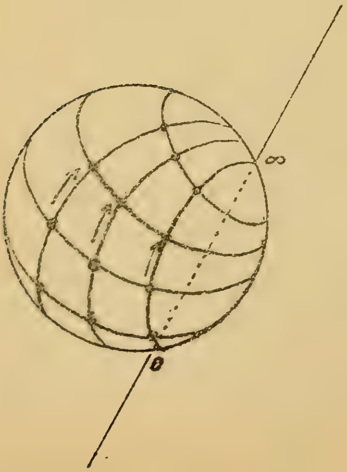
Fig. 37.)



Dies besagt, dass auf der Kugel jeder Punkt auf dem durch ihn gehenden Meridian fortrückt, jedoch so, daſs alle Punkte, welche vorher auf einem Breitenkreise liegen, auch nachher auf einem solchen liegen."

Dies können wir sofort auf den Fall der allgemeinen Lage der Punkte 0 ∞ auf der Kugel übertragen. Wenn wir auch hier in leicht verständlicher Weise die Bezeichnungen „Meridian" und „Breitenkreis" anwenden, so erkennen wir:

Fig. 38.



„Auf der Kugel wandert auch im allgemeinen Fall jeder Punkt auf einem Meridian, so zwar, daſs die Punkte, welche auf einem Breitenkreise liegen, auch später auf einem Breitenkreise liegen."
(Vgl. wieder die Figuren!).

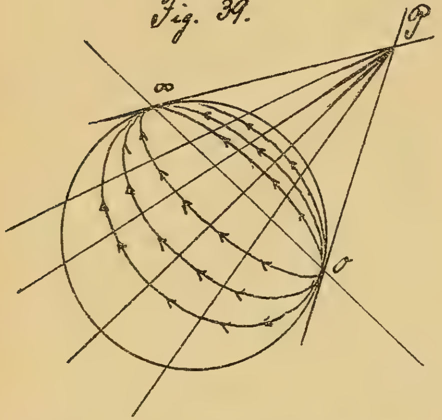
Vergleichen wir diese Sätze mit denen der elliptischen Substitution, so sehen wir, daß die Bezeichnungen: Breitenkreise und Meridiane ihre Rolle gewechselt haben. Da diese Linien auf der Kugel beziehungsweise in Ebenen durch die Axe 0∞ oder ihre conjugierte Polare liegen, so können wir auch sagen:

„Der Unterschied der hyperbolischen und elliptischen Substitution ist geradezu der, daß die Axe und die konjugierte Polare ihre Bedeutung mit einander vertauscht haben."

Wie stellt sich nun die Bewegung des Gesammtraumes im Fall der hyperbolischen Substitution dar? Denken wir uns einmal eine Meridianebene für sich gezeichnet (v. Fig. 39) — in der Figur verläuft die konjugierte Polare durch P senkrecht zur Zeichnung —, so erkennen wir, daß bei der nicht-Euklidischen Bewegung dieser Ebene in sich der Meridiankreis als solcher unverändert bleibt, seine Punkte jedoch vom Punkte 0 aus nach dem Punkte ∞ oder umgekehrt sich verschieben, und daher die durch P laufenden Strahlen eine entsprechende Drehung erleiden. Jeder Punkt der Ebene bewegt sich hierbei, wie wir im vorletzten Wintersemester

her wißen, auf einem nicht = Euklidischen Kreise, deßen „ idealer " Mittelpunkt in P liegt und welcher daher den Meridiankreis in den Punkten 0 und ∞ berührt.

Fig. 39.



„ Wir haben daher allgemein eine nicht = Euklidische Bewegung, bei welcher jede Meridian = ebene sich in sich selbst verschiebt so zwar, daß jeder Punkt des Raumes in seiner Meridianebene eine zur Axe aequidistante Curve beschreibt. *)

3.) Wir sprechen jetzt noch kurz von dem Fall, wo k einen beliebig complexen Wert besitzt. Wir setzen $k = k_0 \cdot e^{i\vartheta}$ und erkennen sofort:

„ Dem Umstande entsprechend, daß jede komplexe Zahl in die Gestalt gesetzt werden kann: $k_0 \cdot e^{i\vartheta}$, wo k_0 reell ist, läßt sich der allgemeine Fall durch eine Aufeinanderfolge einer elliptischen und einer hyperbolischen Substitution ersetzen."

*) Denn jene nicht = Euklidischen Kreise (Fig. 39.) können wir als „ aequidistante " Curven zur Axe 0 ∞ charakterisieren.

Doch können wir uns auch klar machen, welche Bewegung der Kugelpunkte und weiterhin der Raumpunkte allgemein sich ergiebt, wenn wir die Ebene, in der wir λ deuten, gleichzeitig drehen und sich um den Nullpunkt ausdehnen lassen.*) Dann beschreiben sämmtliche Punkte logarithmische Spiralen um den Nullpunkt als asymptotischen Punkt (indem diese Curven ja die Eigenschaft haben, die von dem Nullpunkt auslaufenden Strahlen unter gleichem Winkel zu schneiden (v. die Figur 39 in den „Modulfunktionen" pag. 168.))

„Dem in der Ebene geschilderten Vorgange entsprechend bewegt sich die Kugel dann sowohl im speziellen wie im allgemeinen Falle so in sich selbst, daß jeder ihrer Punkte eine Loxodrome d. h. eine isogonale Trajektorie der Meridiane von einem gewissen Steigwinkel beschreibt, während alle Punkte, die anfänglich auf einem Breitenkreise bezw. Meridiane liegen, auch später auf einem Breitenkreise bezw. Meridian liegen. Hieraus erklärt sich dann auch die Benennung „loxodromische Substitution."

*) Die strenge Formel dieser Bewegung wird durch $\lambda' = k^{\eta} \cdot \lambda$ gegeben, wo η von 0 bis 1 variirt.

„Was nun die zugehörige nicht-Euklidische Bewegung des Gesammtraumes anbetrifft, so ist dieselbe eine Schraubenbewegung des Raumes um seine Axe, bei welcher die Trajektorie jedes Punktes sich mit ∞ vielen Windungen an die beiden Punkte 0 und ∞ heranzieht."

Dies sind also die verschiedenen Bewegungsformen, welche durch die Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ definiert sind. Zusammenfassend werden wir sagen können:

„Jede Bewegung ist eine Schraubenbewegung, die insbesondere in eine Rotation oder eine Verschiebung längs der Axe ausarten kann (elliptischer u. hyperbolischer Fall), wo übrigens auch die Axe unendlich weit fortrücken kann, so daß sie zur Tangente der Kugel wird. (parabolischer Fall.)"

Anmerkung:

Was die Wahl der Bezeichnungen „elliptisch, hyperbolisch, parabolisch" anbetrifft, so beziehen sie sich darauf: Wenn wir allein die reellen Werte von λ in der in der projektiven Geometrie üblichen Weise auf einer Geraden deuten, so werden diejenigen Substitutionen von λ,

welche eine reelle elliptische, hyperbolische, parabolische Maassbestimmung, die wir auf der λ-Axe festlegen mögen, unverändert lassen, gerade solche sein, welche wir entsprechend elliptisch, hyperbolisch, parabolisch genannt haben.

Wir beginnen das letzte Kapitel unserer Vorlesung, das sich mit der

Nicht-Euklidischen Geometrie

im speziellen beschäftigen soll. Wir haben ja schon manches vorweg behandelt; es würde sich jetzt darum handeln, dies im Zusammenhange übersichtlich darzustellen.

Wir fragen uns zunächst:

„Wie ordnet sich die gewöhnliche Metrik des Raumes von 3 Dimensionen in das System der projektiven Geometrie ein?" *)

Es seien mit x, y, z, t rechtwinklige homogene Punktcoordinaten, mit u, v, w, ω rechtwinklige homogene Ebenencoordinaten dargestellt.

---

*) wobei wir uns aber auf ganz wenige kurze Andeutungen beschränken, da alles Wesentliche im Wintersemester bereits hinreichend ausführlich gegeben ist.

Es beruht das Wesen der metrischen Geometrie vom projektiven Standpunkte aus aufgefasst. nun darin, daß es im Raume einen bestimmten Kegelschnitt, den sogenannten Kugelkreis giebt, auf den sich die metrischen Beziehungen gründen.

Es ist die Gleichung einer Kugel in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten allgemein gegeben durch:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$ oder

homogen geschrieben:

$$x^2+y^2+z^2+2Axt+2Byt+2Czt+Dt^2=0.$$

Setzen wir nun $t=0$, d.h. schneiden wir die Kugel durch die ∞ ferne Ebene, so erhalten wir die Schnittkurve als: $x^2+y^2+z^2=0$. $t=0$. Den hierdurch definierten Kegelschnitt nennen wir schlechtweg den Kugelkreis (es ist natürlich ein nullteiliger Kegelschnitt) und zwar auf Grund des durch unsere Formeln bewiesenen Satzes:

„Alle Kugeln des Raumes haben mit der ∞ fernen Ebene denselben nullteiligen Kegelschnitt gemeinsam und sind eben hierdurch als Kugeln definiert."

Es wird nun zu erläutern sein, daß in der That alle metrischen Beziehungen irgend welcher

räumlichen Figuren innerhalb der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie projektive Beziehungen der Figur zum Kugelkreis sind. Wir sprechen zunächst von der Maaßbestimmung in den binären Gebieten, als welche wir die Punktreihe, das Ebenenbüschel und das Strahlbüschel anzunehmen haben, und zwar wollen wir uns dabei, wenigstens in der Hauptsache, auf reelle binäre Gebiete beschränken.

1.) Zwei Punkte einer Punktreihe haben einen Abstand r, welcher sich in den Coordinaten ausdrückt als:

$$r = \frac{\sqrt{(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2+(zt'-z't)^2}}{t \cdot t'}$$

In dieser Formel, wollen wir bemerken, kommen nur Ausdrücke vor, die direkt zu dem Kugelkreis in Beziehung stehen. So ist $t=0$ die ∞ ferne Ebene, welche den Kugelkreis enthält; $(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2+(zt'-z't)^2=0$ dagegen ist die Gleichung des Kegels, der von dem Punkte x, y, z in laufenden Coordinaten $x'y'z't'$ nach dem Kugelkreis sich hinerstreckt.

„Der Ausdruck für r ist hiernach eine simultane Invariante der beiden Punkte und des Kugelkreises."

Wann wird nun $r=0$ sein? Natürlich

dann, wenn der Zähler verschwindet, d. h. wenn die beiden Punkte verbunden eine imaginäre Gerade liefern, die den Kugelkreis trifft, oder anders ausgedrückt:

„Zwei Punkte haben einen verschwindenden Abstand, wenn sie auf einer Minimalgeraden liegen." Fragen wir uns noch, wie weit die Punkte des Kugelkreises von irgend einem Raumpunkte entfernt sind, so bekommen wir als Antwort: $r = \frac{0}{0}$, d. h.:

„Die Punkte des Kugelkreises sind unbestimmt weit von einem beliebigen Raumpunkte entfernt."

2.) Wir betrachten weiter das Ebenenbüschel.

Der den Maaßbestimmungen zu Grunde liegende Kugelkreis ist in Ebenencoordinaten gegeben durch:

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$, wo $u, v\ w$ die Coordinaten einer beliebigen Tangentialebene des Kugelkreises sind.

Der Winkel φ, welchen zwei Ebenen u, v, w und u', v', w' des Büschels mit einander bilden, ist nun gemäß den Betrachtungen der Wintervorlesung gegeben durch:

$$\varphi = \text{arc. cos.} \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \cdot \text{ oder}$$

$$= \text{arc. sin} \frac{\sqrt{(vw'-v'w)^2+(wu'-w'u)^2+(uv'-u'v)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\;\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}$$

oder $= \frac{i}{2} \log. D.V.$, wo D.V. das Doppelverhältnis ist, welches unsere beiden Ebenen mit den beiden durch ihre Schnittlinie gehenden Minimalebenen (d. h. den Tangentialebenen an den Kugelkreis) bilden.

Von der Maassbestimmung im Strahlbüschel wollen wir an dieser Stelle nicht weiter reden, sondern nur noch eine Bemerkung betr. die Punktreihe und das Ebenenbüschel hinzufügen. Die Punktreihe haben wir bisher im Endlichen genommen; es ergab sich dann eine parabolische Maaßbestimmung. Eine unendlich weit liegende reelle Punktreihe unterliegt jedoch nicht der gewöhnlichen parabolischen, sondern einer elliptischen Maassbestimmung. Umgekehrt unterliegt ein reelles Ebenenbüschel, dessen Axe ∞ weit liegt, nicht der gewöhnlichen elliptischen, sondern der parabolischen Maassbestimmung.

Diese Betrachtungen beziehen sich alle auf die binären Gebiete unseres Raumes, in entsprechender Weise können wir auch von den ternären Gebieten reden. Es würde in Betracht kommen (indem wir uns wieder auf reelle Gebiete

beschränken):

1. die Ebene und zwar:
   a. die gewöhnliche Ebene.
   b. die unendlich weite Ebene.
2. der Punkt (als Träger eines Ebenen- und Strahlenbündels) und zwar
   a. der gewöhnliche Punkt
   b. der unendlich weite Punkt.

Was zunächst die Ebene angeht, so haben wir in der gewöhnlichen Ebene eine parabolische Maaßbestimmung, die sich auf die Kreispunkte in dieser Ebene gründet, in der unendlich fernen Ebene eine elliptische Maassbestimmung bezüglich des Kugelkreises selbst.

Was nun den Punkt betrifft, so haben wir in einem gewöhnlichen (im Endlichen gelegenen) Punkte eine elliptische Maassbestimmung bezüglich des zugehörigen Minimalkegels, d.h. des Kegels, der sich von dem Punkte aus nach dem Kugelkreise erstreckt, in einem unendlich weiten Punkt eine parabolische Maassbestimmung in Bezug auf das an den Kugelkreis gehende Tangentenpaar. Alles dies war ja im letzten Winter besprochen.

Hierdurch ergiebt sich nun eine Auffassung

der metrischen Verhältnisse, welche für viele geometrische Beziehungen außerordentlich nützlich ist. Wir können jedoch hier nicht im Einzelnen auf diese Beziehungen eingehen, wir wollen nur 3 Punkte kurz erwähnen:

1.) Fragen wir uns einmal, was sind die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades und wie sind sie zu definieren?

„Wir wissen, je zwei Flächen 2ten Grades haben ein gemeinsames Polartetraeder. Wenn nun die eine der beiden Flächen zum Kugelkreise ausartet, dann geht das gemeinsame Polartetraeder gerade in das hier vorliegende Hauptaxentetraeder über,*) so daß also die Lehre von den Hauptaxen der Fläche 2ten Grades als ein specieller Fall der allgemeinen Lehre von dem 2 Flächen 2ten Grades gemeinsamen Polartetraeder erscheint."

2.) Was sind konfocale Flächen 2ten Grades? Es sei eine Fläche zweiten Grades in Ebenencoordinaten geschrieben:

$\Phi(u, v, w, \omega) = 0$. Wir nehmen den Kugelkreis

*) d. h. dasjenige Tetraeder, welches durch die H..ptaxen und die unendlich weite Ebene bestimmt ist.

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$ hinzu als eine 2te Fläche 2ten Grades. Dann wird die Schaar der zu $\Phi(u, v, w\, \omega) = 0$ konfocalen Flächen 2ten Grades gegeben durch: $\Phi + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Dies Resultat drückt man nun gewöhnlich geometrisch aus, indem man sagt:

„Confocale Flächen 2ten Grades sind solche, welche in dieselbe den Kugelkreis enthaltende Developpable einbeschrieben sind."

[Näheres v. bei Salmon = Fiedler, anal. Geom. d. Raumes I. Kap. IX. Dort wird man erkennen, wie nützlich es ist, die Theorie der konfocalen Flächen 2ten Grades unter Bezugnahme auf den Kugelkreis zu entwickeln, indem eine grosse Zahl von Sätzen sich sehr einfach auf diese Weise ergeben.]

3.) Doch auch die Theorie der höheren Flächen giebt uns Beispiele, welche Summe von Hülfsmitteln in der That die Heranziehung des Kugelkreises uns an die Hand giebt. Vgl. z. B. Die Theorie der Minimalflächen von Sophus Lie, Annalen 14, 15.

Die Beziehungen zum Kugelkreise sind übrigens nicht nur bei rein geometrischen Fragen von Wichtigkeit, sondern ebensowohl bei gewissen Betrachtungen, die dem Gebiet der Mechanik

angehören. In dieser Hinsicht besprechen wir kurz:

1.) <u>Das Gebiet der Kinematik</u> oder die Lehre von den Bewegungen

2.) <u>Die Mechanik der freien Systeme,</u>

3.) <u>Die Mechanik der starren Körper.</u>

Wir wollen auf diese 3 Punkte einzeln näher eingehen.

1.) <u>Die Kinematik oder die Lehre von den Bewegungen.</u>

Wir haben ∞^6 Bewegungen im Euklidischen Raume, dieselben sind sämmtlich darzustellen als Collineationen, die den Kugelkreis festlassen. Wir können jedoch nicht sagen, daß jede Collineation des Raumes, die den Kugelkreis in sich überführt, nun auch umgekehrt eine gewöhnliche Bewegung des Raumes darstellt. Es sind unter diesen Collineationen noch die Aehnlichkeitstransformationen enthalten, d. h. diejenigen Collineationen, bei denen zwar die Winkel erhalten bleiben, doch die Strecken in Multipla ihrer selbst übergehen (Bei der nicht-Euklidischen Geometrie kommen diese Aehnlichkeitstransformationen in Wegfall, wie wir gleich hier bemerken wollen.) <u>Der Fundamentalsatz der Kinematik ist</u>

nun von Chasles 1829 ausgesprochen in dem Bulletin de Férussac. Dort hat er den Satz aufgestellt:

„Jede Bewegung (des Eukl. Raumes) ist eine Schraubenbewegung."

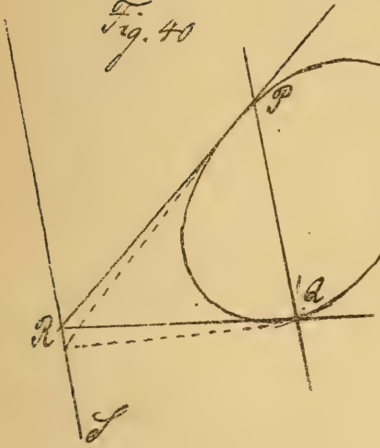
Wie haben wir dies von unserem projektiven Standpunkte aus aufzufassen? Bei jeder Collineation muss, wie wir wissen, ein Tetraeder fest bleiben, welches natürlich auch ausarten kann. Wo liegt nun dies Tetraeder bei unseren Bewegungen? Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns etwa denjenigen Fall der nicht-Euklidischen Geometrie herangezogen, bei dessen Bewegungen ein beliebiger einteiliger Kegelschnitt in sich übergeht. Denken wir uns diesen einteiligen Kegelschnitt gezeichnet, der also dem Kugelkreis der unendlich fernen Ebene entspricht, so werden bei der Collineation desselben in sich zwei Punkte (P u. Q) und die Tangente in ihnen fest bleiben. Diese bestimmen als Schnittpunkt einen dritten festbleibenden Punkt R, der als Eckpunkt des im Raume festbleibenden Tetraeders doppelt zu zählen ist, und durch ihn geht die weitere Kante RS des festbleibenden Tetraeders hindurch.

Dies auf den Fall der Euklidischen Geometrie

übertragen ergiebt:

„Dasjenige Tetraeder, welches bei einer Bewegung des Euklidischen Raumes der allgemeinen Theorie der Collineationen zufolge festbleiben soll, ist so ausgeartet, daß 2 seiner Ecken in der ∞ fernen Ebene zusammenfallen, während ihre Verbindungslinie wohl bestimmt bleibt und die Schraubenaxe des Chasles'schen Satzes abgiebt.

Fig. 40



Die beiden anderen Ecken des Tetraeders sind die Berührungspunkte, welche die durch die Schraubenaxe hindurchgehenden Minimalebenen mit dem Kugelkreise gemein haben, und hierdurch sind dann die Kanten und Seitenflächen des Tetraeders völlig bestimmt."

Denken wir uns anstatt des festbleibenden Kegelschnittes (im spec. des Kugelkreises) zunächst ein sehr flaches Hyperboloid, so wird es bei diesem leicht sein, sich die Lage des bei einer Collineation des Raumes, bei der die F_2 in sich übergeht, festbleibenden Tangentialtetraeders zu

veranschaulichen.

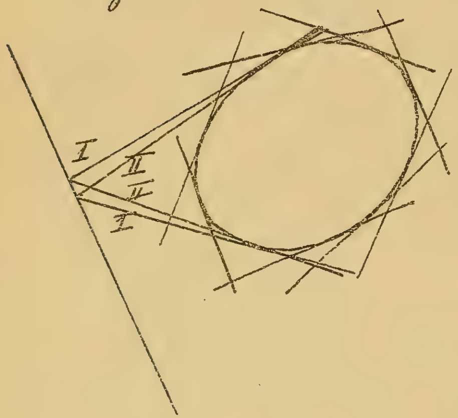


Fig. 41.

„<u>Unser in Fig. 40 dargestelltes Tetraeder erscheint dann als die Ausartung eines Tangentialtetraeders einer Fläche 2ten Grades, die sich einstellt, sobald die Fläche in den Kugelkreis oder sonst einen Kegelschnitt degenerirt.</u>"

Wir haben der Betrachtung der Kinematik im Euklidischen Raume noch eine Bemerkung hinzuzufügen, die uns zugleich einen Ausblick auf die Verhältnisse der nicht Euklidischen Geometrie eröffnen wird. Im Euklidischen Raume können wir bekanntlich die Bewegungen zusammensetzen aus dreifach ∞ vielen Parallelverschiebungen, die alle unter einander vertauschbar sind, und aus dreifach ∞ vielen Drehungen um einen festen Punkt O. Diese Zerlegung der ∞^6 Bewegungen ist jedoch im nicht-Euklidischen Raume nicht ausführbar, eben weil es keine Parallelverschiebungen und überhaupt keine dreifach unendlich vielen vertauschbaren Bewegungen giebt.

Dies erklärt die besondere Form, welche eine Reihe mechanischer Theoreme in der Euklidischen Geometrie abweichend von der nicht-Euklidischen Geometrie annehmen, indem in letzterer diese Theoreme sich infolge dessen gleichmäßiger gestalten. An diesen nur vorläufig ausgesprochenen Satz werden wir sogleich (bei Besprechung der Flächensätze etc.) wieder anzuknüpfen haben.

Wir gehen über zur

2. Mechanik freier Systeme.

Wie gewinnt man die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems, sagen wir, von Massenpunkten? Man stellt für die Massenpunkte einmal den Ausdruck für die lebendige Kraft auf:
$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt} \right)^2$; wo ds_i das Bogenelement des Massenpunktes m_i bezeichnet, andererseits den Ausdruck des Potentials, welches, wenn man z.B. an den Fall des Planetensystems denkt, die Form annimmt:

$$U = C \cdot \Sigma \frac{m_i \cdot m_k}{r_{ik}}.$$

Wir bekommen alsdann die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems, wenn wir nach dem Hamilton'schen Princip verlangen, daß $\delta \int (T-U)\, dt = 0$ ist.

Wir werden uns nun gleich fragen können, wie dieser Ansatz in der nicht= Euklidischen Geometrie sich gestaltet. Was die lebendige Kraft angeht, so wird auch hier:

$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$ zu setzen sein, wo natürlich unter ds_i das nicht = Euklidische Bogenelement zu verstehen ist. Weniger nahe liegt die Beantwortung der Frage, was man als Potential zweier Massenpunkte im nicht= Euklidischen Raume denken soll. In dieser Hinsicht sind 2 Arbeiten von Schering zu erwähnen, die beide in den Göttinger Nachrichten (in den Jahren 1870 und 1873) veröffentlicht sind. Die erste Arbeit führt den Titel: „die Schwerkraft im Gaußischen Raume." (wo natürlich als Gaußischer Raum der Raum der hyperbolischen Geometrie zu verstehen ist). Die zweite Arbeit dehnt die Untersuchungen allgemein aus einmal auf den Fall der elliptischen Geometrie, dann auf Räume von n Dimensionen. es ist dies die Abhandlung: „Die Schwerkraft im mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Raume." Weiter sind noch 2 Göttinger Dissertationen über diesen Gegenstand

zu nennen:
Fresdorf. 1873. „Ueber die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemann=schen Raume." und
Opitz. 1881. „Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Rie=mannschen Räumen."

Wir hatten die nicht=Euklidische Entfernung r gesetzt $r = c.\log.DV.$ (hyperbolische Geometrie). resp.
$r = ic'\log.DV.$ (elliptische Geometrie), wo wir im speciellen $c' = \frac{1}{2}$ gewählt haben.

Nach der Scheringschen Formel ist alsdann die Potentialfunktion zweier Punkte, abgesehen von einer Constanten, die von den Massen jener Punkte und den gewählten Einheiten abhängt, im Fall der hyperbolischen Geometrie gleich:

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{e^{\frac{r}{2c}} + e^{-\frac{r}{2c}}}{e^{\frac{r}{2c}} - e^{-\frac{r}{2c}}}$$

oder wenn wir für r den obigen Wert einführen:

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D^{-1}}}{\sqrt{D} - \sqrt{D^{-1}}}.$$

Setzen wir hierin, um die entspr. Formel für die elliptische Geometrie zu erhalten, für c ein ic', so kommt:

$U = \mp \frac{1}{2c'} \cdot \operatorname{cotg.} \frac{r}{2c'}$, oder in dem besonderen Falle, wo $c' = \frac{1}{2}$ ist,

$U = \mp \operatorname{cotg.} r$.

In der That, wenn wir c unendlich werden lassen, um den Uebergang zur Euklidischen Geometrie zu machen, so geht die obige Formel für die hyperbolische Maaßbestimmung, indem wir $e^{\frac{r}{2c}}$ in eine Potenzreihe entwickeln und uns auf die beiden ersten Glieder beschränken, über in

$$\frac{1}{2c} \cdot \frac{1 + \frac{r}{2c} + 1 - \frac{r}{2c}}{1 + \frac{r}{2c} - 1 + \frac{r}{2c}} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{2c}{r} = \frac{1}{r} \cdot \text{d. h.}$$

„Bei unendlich werdendem c entsteht wirklich aus dem Scheringschen Potentialausdruck das Elementarpotential $\frac{1}{r}$ der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie."

Im übrigen möchte ich hier gleich eine merkwürdige Sache einschalten, die den elliptischen Raum betrifft. Wir hatten, wie wir uns erinnern werden, denselben in zwei Gestalten kennen gelernt, einmal als einfachen, projektiven Raum, dann als verdoppelten oder sphaerischen Raum. In ersterer Hinsicht war uns das Strahlen- und Ebenenbündel typisch, für welches die einfache elliptische Geometrie gilt;

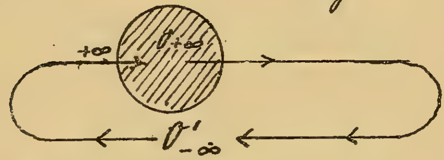
wenn wir aber das Strahlenbündel auf eine herumgelegte Kugel beziehen, so entstand auf der Kugel die sphaerische Geometrie, indem die Beziehung der Kugel auf das Strahlenbündel eine ein-zweideutige ist. Das Charakteristische dieser Verhältnisse bestand dann darin: In der einfachen Geometrie schneiden sich 2 kürzeste Linien in einem Punkte, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich π. In der sphaerischen Geometrie schneiden sich zwei kürzeste Linien in 2 Punkten, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich 2π. Der „Riemannsche Raum" wird nun im allgemeinen so verstanden und so geschieht es in den genannten Publicationen, daß ihm die zweite der genannten Geometrieen zu Grunde liegt.

Nachdem wir uns dies ins Gedächtnis zurückgerufen haben, wollen wir die Potentialfunktion im einen und im anderen Raum der elliptischen Maassgeometrie betrachten.

1, Denken wir uns zunächst, daß wir im sphaerischen Raum operieren. Wir betrachten als Potentialfunktion den Ausdruck $ctg.\, r$, und nehmen dementsprechend etwa im Punkte

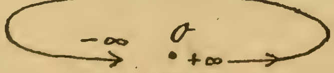
O eine anziehende Masse = 1 als vorhanden an. In ihm ist das Potential gleich $+\infty$. Wenn wir uns dann vom Punkte O aus entfernen, bis wir nach Durchlaufung der Strecke π zum Gegenpunkt O' gelangen, so wird in ihm das Potential $\operatorname{ctg} r = -\infty$ sein.

Fig. 42.



Wir haben uns daher zu denken, daß im Gegenpunkte O' eine abstossende Masse gleich −1 vorhanden ist. Legen wir vom Gegenpunkte O' aus nochmals die Strecke π zurück, so gelangen wir wieder zum Ausgangspunkt O zurück, für den cotg. r dann den früheren Wert $+\infty$ wieder erhält. Diese Anschauungsweise, besonders was das Verhalten von cotg. r im Gegenpunkt O' angeht, ist ja einigermaßen compliciert, enthält aber durchaus nichts Widersinniges, da wir ja in Wirklichkeit in der Umgebung des Punktes O bleiben.

2. Nehmen wir nun den Fall des einfachen elliptischen Raumes vor. Wir gehen wieder aus von dem Punkte O, für den cotg. r gleich $+\infty$ ist, in dessen Nähe also Anziehung stattfindet.



Nach Durchlaufung der Strecke π kehren wir zum Punkte O zurück, für den dann cotg. $\vartheta = -\infty$ wird, was Abstoßung in der Nähe des Punktes O voraussetzen würde.

„Im einfachen elliptischen Raume erweist sich daher cotg. ϑ als keine eindeutige Funktion der Ordinate der Raumpunkte. cotg. ϑ und $-$cotg ϑ gehen in einander über, sobald wir eine gerade Linie nach ihrer ganzen Durchstreckung durchlaufen. Das aber widerspricht der Vorstellung, welche wir von einem mechanischen Grundgesetze haben, wo doch die Kraft, die auf einen Punkt wirkt, an jedem Orte des Raumes eindeutig bestimmt sein soll, und deshalb also ist die Annahme des einfachen elliptischen Raumes mit der hier gewollten Ausdehnung der Potentialtheorie unverträglich."

Was nun die weitere Behandlung der mechanischen Differentialgleichungen eines freien Systems angeht, so leiten wir ja in der Euklidischen Geometrie 7 Integrale ab; es sind dies:

das Integral der lebendigen Kraft,
die drei Flächensätze,
die drei Sätze über die Geschwindigkeit des

Schwerpunktes, aus welch' letzteren sich leicht 3 weitere Sätze über den Ort des Schwerpunktes ergeben.

Bei Annahme der nicht Euklidischen Geometrie hat es nun keine Schwierigkeit, das erste Integral, d.h. den Satz von der lebendigen Kraft, ebenfalls aufzustellen. Die folgenden Sätze dagegen gestalten sich anders, denn in der nicht Euklidischen Geometrie giebt es keinen Schwerpunkt, weil es keinen Begriff der parallelen Kräfte giebt. An Stelle der 3 Flächensätze und der 3 Geschwindigkeitssätze für den Schwerpunkt, welche die Euklidische Geometrie kennt und die zusammengenommen aussagen, daß das Drehmoment des Systems in Bezug auf jede Raumgerade genommen constant ist, treten hier dann 6 coordinierte Sätze, welche das Nämliche für jede Raumgerade aussagen.

Ist nämlich m_i die Masse, ω_i die Drehgeschwindigkeit des Punktes i in Bezug auf eine bestimmte Gerade, d.h. diejenige Componente der Bewegung, welche als eine einfache Rotation um die gewählte Axe angesehen werden kann, so gilt für 6 beliebige Axen der Satz, daß
$\Sigma\, m_i \cdot \omega_i = \text{const.}$ ist.

" Aus diesen 6 Sätzen folgt von selbst die

<u>Constanz des Drehmomentes für jede beliebige 7te gerade Linie.</u>" Diese Theorie ist ebenfalls in der ersten Schering'schen Arbeit enthalten, jedoch nur mit Worten, ohne Formeln, ausgeführt.

3.) Was nun endlich die <u>Mechanik der starren Körper</u> angeht, so lassen sich, allgemein zu reden, in ihr dreierlei geometrische Theorieen abgrenzen.

a.) Die erste Theorie nimmt auf die Massenverteilung im Körper selbst noch keine Rücksicht, es handelt sich bei ihr um die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte am starren Körper oder auch um die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers. Die Verbindung dieser zweierlei Gegenstände hängt eng zusammen mit der Lehre von den virtuellen Geschwindigkeiten; vergl. Math. Annalen 4. „Notiz über den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper." (Klein.)

b.) Eine zweite Theorie betrachtet die Massenverteilung im Körper; sie wird spez. als Massengeometrie (géometrie des masses) bezeichnet. Schwerpunkt, Hauptträgheitsaxen u. s. w. sind die Begriffe, welche hier discutiert werden. Auch die Theorie der unendlich kleinen Oscillationen eines Körpers um die Gleichgewichtslage gehört hierher.

c.) Man wird drittens die endlichen Bewegungen eines sich selbst überlaßenen freien Körpers geometrisch betrachten können (Poinsots rollende Kegel).

Die drei Problemstellungen sind vielfach behandelt worden; wir geben eine kurze Uebersicht der bez. Literatur:

Ad. a. Was zunächst den ersten Punkt angeht, so giebt es eine ältere, auf Poinsot zurückgehende Theorie.*) Poinsot benutzt nämlich vor allen Dingen solche Kräfte, die unendlich klein sind, aber in der unendlich fernen Ebene liegen, so daß sie in Bezug auf den starren Körper wohl ein Drehmoment, aber keine Parallelcomponente haben. Poinsot war jedoch ein Mann der elementaren Darstellung, der seinen Schülern nicht zumuten wollte, sich unendlich ferne, unendlich kleine Kräfte zu denken. Deswegen führte er an ihrer Statt den Begriff des „Kräftepaares" ein, unter dem man sich ein Paar (entgegengesetzter) paralleler und entgegengesetzt gleicher Kräfte in einem gewissen durch das endliche Drehmoment bestimmten Abstand zu denken hat.

(In der That haben solche Kräfte ein Resultante, die im Unendlichen angreift, aber ihrer Größe nach

*) die noch fast überall benutzt wird.

gleich 0 ist, d. h. sie sind ein Aequivalent für unsere unendlich kleine unendlich ferne Kraft.) Doch wollen wir hier den Begriff der unendlich fernen Kraft beibehalten, weil wir dadurch deutlicher das Princip der Methode bezeichnen können. Dann beruht die Poinsotsche Behandlung der Kraftsysteme am starren Körper in folgendem:

„Poinsot geht behufs Zusammensetzung der Kräfte davon aus, dass man jede Kraft zerlegen kann in eine solche Kraft, welche an einem festen Punkte angreift und in eine solche (unendliche kleine) Kraft, welche in der ∞ fernen Ebene liegt, und er hat also nur zu untersuchen, erstens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die auf einen festen Punkt wirken, und zweitens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die in der unendlich fernen Ebene liegen."

Dieser Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte geht nun genau parallel eine Lehre von der Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche ein starrer Körper erleiden kann. Der geraden Linie, nach welcher die Kräfte wirken, entsprechen dabei die Axen, um welche die Rotationen statthaben, insbesondere den unendlich weiten Kräften entsprechen Rotationen um unendlich weite Axen, d. h.

unendlich kleine Parallelverschiebungen. Jede Drehung kann dann dem gerade ausgesprochenen Satze entsprechend zerlegt werden in eine Drehung um eine durch einen festen Punkt gehende Axe und eine Parallelverschiebung, und also reduciert sich die Aufgabe von der Zusammensetzung beliebiger Drehungen auf die Zusammensetzung von Drehungen um einen festen Punkt und auf die Zusammensetzung von Parallelverschiebungen.

Wir fragen uns nun sogleich: Lässt sich diese Poinsot'sche Theorie auf die Verhältnisse der nicht-Euklidischen Geometrie übertragen? Offenbar würde dies nur künstlich möglich sein, indem man an Stelle der ∞ fernen Ebene, welche uns in der nicht-Euklidischen Geometrie fehlt, willkürlich eine beliebig auszuwählende feste Ebene des Raumes setzte. Jedenfalls ginge aber hierbei das Schöne, welches in der Poinsot'schen Theorie in der von selbst gegebenen ausgezeichneten Lage der ∞ fernen Ebene liegt, verloren.

Nun giebt es aber neben der älteren Theorie von Poinsot noch eine zweite auf dieselben Fragen bezügliche Theorie, die Schraubentheorie von Ball. 1873. (the theory of Screws).

Dieselbe ist neuerdings in einem deutschen Werke

dargestellt worden: Gravelius, „theoretische Mechanik starrer Körper." (1889). „In dieser Schraubentheorie sieht Ball principiell ab von der Zerlegung des Zusammensetzungsproblems, welche mit Hülfe der ∞ fernen Ebene zu bewerkstelligen ist, stellt vielmehr gleich das allgemeine Problem voran, indem er die unendlich kleinen Bewegungen als etwas Ganzes, Unzerlegbares betrachtet:
„Wenn irgend zwei ∞ kleine Schraubenbewegungen eines Körpers um beliebige (im Allgemeinen zu einander windschiefe) Axen gegeben sind, wie konstruiere ich alsdann die resultierende ∞ kleine Schraubenbewegung?

Das ist die Frage, mit der Ball beginnt und auf deren Antwort er ein ganzes Lehrgebäude aufbaut.

"Welches ist der Wert dieser Ball'schen Theorie?
„Offenbar erscheint die Ballsche Schraubentheorie beim völlig freien Körper nur als eine andere Form der Poinsotschen Theorie; wenn es sich aber um Körper handelt, deren Beweglichkeit durch 1, 2, 3, 4, 5 Bedingungen allgemeinster Art gehemmt sind,*) Bedingungen, welche vielleicht gar keine Parallel=

*) Man sagt in diesem Falle, der Körper habe nur 5, 4, 3 etc. „Grade der Freiheit."

verschiebung des Körpers oder eine reine Rotation derselben mehr zulaßen, sondern nur Verschiebungen, die notwendig mit Rotationen verbunden sind, (bez. Rotationen, die mit Parallelverschiebungen verbunden sind), so ist die Ball'sche Theorie durchaus notwendig. Denn eine Zerlegung im Poinsotschen Sinne findet dann nicht mehr statt."

„Die Ballsche Schraubentheorie kann nun in der That ohne sonderliche Mühe auf die nicht-Euklidische Geometrie übertragen werden, weil auch im nicht-Euklidischen Raume jede Bewegung eine Schraubenbewegung ist. Nur muß man beachten, daß die nicht-Euklidische Schraubenbewegung 2 Axen hat, die sich im hyperbolischen Falle allerdings noch gut unterscheiden laßen, dagegen im elliptischen Falle durchaus gleich berechtigt sind."

Litteratur:

a.) Lindemann, Diss. Bd. 7. der Annalen (1873).
„Ueber ∞ kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektiver Maassbestimmung.

b.) Clifford Gesammelte Werke No. 44.
„On the Theorie of Screws in a space of Constant Positive Curvature." (datiert 1876.)

c./ Arbeiten von <u>Ball</u> in den Abhandlungen der irischen Academie. Genauere Citate v. im oben erwähnten Werke von Gravelius. pag. 619.

Näher auf diese Verhältniße einzugehen, würde natürlich viel zu weit führen.

Wir gehen jetzt über:

<u>Ad. b. zur Betrachtung der Massengeometrie.</u>

Wir wollen zunächst in geometrischer Weise ausführen, was wir unter dem „Schwerpunkt" und den „Trägheitsaxen" eines Körpers zu verstehen haben, und zwar wollen wir in dieser Hinsicht diejenige Definition geben, die <u>Heße</u> in seinen Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes pag. 353 ff. anführt.

Es sei:

$$\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0.$$ die Gleichung einer beliebigen Ebene. Die linke Seite ist der Abstand, den ein Punkt x, y, z von der Ebene hat. Das Quadrat dieses Ausdrucks multipliciert mit der Masse m des Punktes x, y, z giebt uns das <u>„zweite Moment des Punktes in Bezug auf die Ebene"</u> als:

$$m \cdot \left[\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right]^2.$$ (Die dritten, vierten, ... Potenzen des Klammer-

ausdrucks multipliciert mit m würden entspr. das Moment dritter, vierter, u. s. w. Ordnung geben.)

Sind mehrere discrete Massenpunkte vorhanden, so stellt sich das Gesammtmoment derselben in Bezug auf die Ebene dar als:

$$\Sigma n\, m_n \left(\frac{ux_n + vy_n + wz_n - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right)^2,$$

während, wenn ein continuierlich ausgedehnter Körper vorliegt, das Gesammtmoment die Form annimmt:

$$\int dm \left[\frac{ux + vy + wz}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right]^2,$$ wo die Integration über den ganzen Körper zu erstrecken ist. Dies Moment zweiter Ordnung des Körpers in bezug auf die Ebene können wir natürlich nach u, v, w, entwickeln, wir bekommen die quadratische Form:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 + \ldots\ldots,$$

wo $A, B, C \ldots$ u. s. w. von der Gestalt des Körpers abhängige Constante sind.

„Hesse benennt nun als das imaginäre Bild eines festen Körpers diejenige nullteilige Fläche 2ten Grades, welche umhüllt wird von solchen Ebenen, betreffs deren das Moment 2ter Ordnung unseres Körpers gleich 0 ist."

Die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten erhalten wir ganz einfach durch Nullsetzen des obigen Ausdrucks.

„Der Schwerpunkt des Körpers und seine 3 Hauptträgheitsaxen sind nun einfach der Mittelpunkt und die Hauptaxen dieses imaginären Bildes."

An die Theorie der Trägheitsmomente und Hauptträgheitsaxen knüpft nun an:

ad. c. die Betrachtung der Bewegung eines freien, sich selbst überlaßenen Körpers.

Wir haben uns hier zu fragen, 1. wie ist die Bewegung des Schwerpunktes, 2. wie ist die Drehung des Körpers um denselben.

In Betreff des ersten Punktes gilt der Satz, daß, wenn keine äusseren Kräfte auf den Körper wirken, der Schwerpunkt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt andererseits wird gegeben durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}\,\frac{dp}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C}).\,q.\,r$$

$$\mathfrak{B}\,\frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A}).\,r\,p$$

$$\mathfrak{C}\,\frac{dr}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B}).\,p\,q,$$ wo p, q, r die

instantanen Drehungsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind. Es sind dies die bekannten <u>Eulerschen Gleichungen</u> der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt, wie man sie in jedem Lehrbuch der Mechanik findet. Die Auswertung dieser Formeln geschieht entweder durch Integration mittelst elliptischer Funktionen oder nach Poinsot in geometrischer, der Anschauung zugänglicher Weise, indem man einen gewissen Kegel auf einem anderen sich abrollen läßt.

Wir werden nun wieder fragen, wie stellt sich diese Theorie der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt bei nicht-Euklidischer Maassbestimmung dar? Eine Antwort giebt (unter Beschränkung auf den elliptischen Raum) <u>Clifford</u> in seiner Abhandlung: <u>„Motion of a Solid in Elliptic Space."</u> No 41 seiner gesam. Werke. (1874).

Clifford beginnt damit, zunächst das Analogon zu Hesse's Definition der Trägheitsaxen aufzusuchen. Es sei die Fundamentalfläche der elliptischen Maassbestimmung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Man bilde dann den Ausdruck:

$$\Sigma\, m^{(i)} \frac{(u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)} + u_4 x_4^{(i)})^2}{x_1^{(i)2} + x_2^{(i)2} + x_3^{(i)2} + x_4^{(i)2}},$$

genommen über alle Massenpunkte des Systems. Diesen Ausdruck nennt Clifford natürlich das zweite Moment des Systems in Bezug auf die Ebene u. Entwickelt nimmt derselbe die Form an:

$$A_{11} u_1^2 + 2A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2A_{13} u_1 u_3 + 2A_{23} u_2 u_3$$
$$+ A_{33} u_3^2 + 2A_{14} u_1 u_4 + 2A_{24} u_2 u_4 + 2A_{34} u_3 u_4 + A_{44} u_4^2.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich null, so erhalten wir die Bedingung dafür, daß die Ebene u ein verschwindendes zweites Moment hat. Die Gesammtheit der Ebenen dieser Eigenschaft nennen wir wieder das „imaginäre Bild des Körpers." Auch hier ist dasselbe eine nullteilige Fläche zweiten Grades, da ja unser ursprünglicher Summen-Ausdruck rein aus Quadraten zusammengesetzt war. Diese Fläche zweiten Grades hat nun mit unserer Fundamentalfläche zweiten Grades ein Polartetraeder gemein. Im Fall der Euklidischen Geometrie lieferte das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche d.h. des imaginären Kugelkreises gerade in seinen im Endlichen verlaufenden Kanten

die drei Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt des Körpers, während die drei anderen Kanten in der ∞ fernen Ebene lagen. Doch hier, im elliptischen Falle, tritt natürlich die Vereinfachung nicht ein, die für den genannten Euklidischen Fall maassgebend ist, daß nämlich eine ausgezeichnete Ebene, die wir von vorneherein kennen (nämlich die unendlich ferne Ebene des Euklidischen Raumes) dem Polartetraeder angehört.

„Das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche giebt nun in seinen Kanten diejenigen 6 Linien, welche Clifford als die 6 Hauptträgheitsaxen des Körpers bezeichnet."

Da es sich hier um ein Polartetraeder der absoluten Fläche handelt, so ist eine Drehung um eine unserer Kanten zugleich eine Verschiebung längs der konjugierten Kante. Seien jetzt u, v, w die Drehungsgeschwindigkeiten längs dreier Kanten unseres Tetraeders, die in einem Eckpunkte zusammenlaufen, x, y, z die Verschiebungsgeschwindigkeiten längs derselben drei Kanten, dann wird nach Clifford l.c. die Bewegung eines freien, keinen äußeren Kräften

unterworfenen Körpers durch folgendes den Euler=schen Gleichungen analoge System gegeben:

$\frac{dx}{dt} = C(vw - yz)$ und zwei analoge Gl. für $\frac{dy}{dt}$ u. $\frac{dz}{dt}$

und

$\frac{du}{dt} = C'(zv - yw)$ und zwei weitere Gl. für $\frac{dv}{dt}$ u. $\frac{dw}{dt}$. Dieses System besteht also aus 6 von einander nicht abtrennbaren Differentialgleichungen, die im übrigen noch der Bearbeitung harren.

„Der Euklidische Fall ist hier eben deswegen sehr viel einfacher, indem von den 6 hingeschriebenen Gleichungen die drei ersten ohne weiteres sich erledigen, die auf die Bewegung des Schwerpunktes treffen; die drei anderen sind dann die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen."

Soviel über die Mechanik fester Körper. Wir werden unseren bisherigen Betrachtungen zum Schluß noch in einem kurzen Abriss die Behandlung gewisser geometrischer Fragen der nicht=Euklidischen Geometrie hinzufügen, die wesentlich sind und bisher noch nicht berücksichtigt waren.

Nachträge zur nicht=Euklidischen Geometrie

1.) Was zunächst die Aufstellung allgemeiner algebraischer Formeln für die Maassverhältnisse des R_3 angeht, so werden wir natürlich auszugehen haben von einer beliebigen quaternären quadratischen Gleichung: $\sum_1^4 a_{ik} x_i x_k = 0$ oder in Ebenencoordinaten geschr.: $\sum_1^4 \alpha_{ik} u_i u_k = 0$, welche uns das unserer Maassbestimmung zu Grunde zu legende Fundamental=Gebilde zweiten Grades ergiebt. Wir werden dann zunächst zu fragen haben, wie wir den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen in Bezug auf dies Gebilde definieren wollen. Die hier in Betracht kommenden Formeln werden genau analog denen für die Ebene sein. Der Abstand zweier Punkte x, y ist z. B. als

$$A_{x,y} = c.\log.DV = c\log.\frac{\Sigma xy + \sqrt{\Sigma^2_{xy} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{yy}}}{\Sigma xy - \sqrt{\Sigma^2_{xy} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{yy}}}$$

oder anders geschrieben:

$$= \frac{2c}{i}\,\text{arc.cos.}\,\frac{\Sigma_{xy}}{\sqrt{\Sigma_{xx}\,\Sigma_{yy}}}$$ etc. zu definiren.

Diese Formeln stimmen mit denen der Ebene genau überein, nur daß die Σ bis zum Index 4 laufen, nicht nur bis zum Index 3 wie in der Ebene. Es ist kaum nötig, ausführlicher

hierbei zu verweilen.

Doch im Raume können wir gewisse höhere Probleme der Maassgeometrie aufstellen, für welche in der Ebene sich noch kein Analogon bietet. Wenn auch den Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Ebenen, des Abstandes eines Punktes von einer Ebene im Raume genau die entsprechenden Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Geraden, des Abstandes eines Punktes von einer Geraden in der Ebene gegenüberstehen, so haben wir im Raume noch die Beziehungen der geraden Linien zu sich selbst und den Punkten und Ebenen. Man spricht z. B. bei 2 windschiefen Geraden in der Euklidischen Geometrie von dem kürzesten Abstand derselben, außerdem auch von ihrer Neigung; dieselben Fragen lassen sich natürlich auch in der nicht = Euklidischen Geometrie stellen. Wir wollen gleich den Standpunkt einnehmen, daß wir einen n = fach ausgedehnten Raum betrachten.

„Es entsteht alsdann das allgemeine Problem, in einem solchen Raum von n Dimensionen für irgend 2 lineare Mannigfaltigkeiten desselben bezw. von μ und von ν Dimensionen die für

sie in Betracht kommenden Maassunterschiede zu berechnen."

Solche Fragen sind in allgemeinster Weise gelöst von dem italienischen Mathematiker d'Ovidio in Turin in den beiden Arbeiten:
a.) Studio sulla geometria projettiva.*) Annali di Matem. VI. 1873 (vgl. auch das Referat von mir im Bd. V der Fortschritte der Mathem. p. 273 ff.)
b.) Le funzione metriche fondamentali negli spazi die quanto si vagliano dimensione e di curvatura constante. Mem. Acad. dei Lincei. Bd. I. 1876.

Ein Auszug der letzten Arbeit findet sich in den Annalen Bd. XII.**)

2.) Was nun die speziellen Realitätsverhältnisse angeht im Raum von 3 Dimensionen, so haben wir besonders die drei Fälle zu unterscheiden, daß unsere Fundamentalfläche dem ovalen, nullteiligen oder ringförmigen Typus der eigentlichen Flächen zweiten Grades angehört.

*) geometria projettiva ist soviel wie nicht-Euklidische Geometrie, d.h. metrische Geometrie von projektiven Standpunkte aus.

**) vergl. übrigens auch, was die Verhältnisse speziell des R_3 angeht, die schon auf pag. 215 genannte Arbeit von Lindemann in Bd. 7 der Math. Ann.

Im ersten Falle ergab sich die hyperbolische Geometrie, für die wir besonders Interesse gewonnen, wegen ihrer Beziehung zur Funktionentheorie. Im zweiten Falle hatten wir es mit der elliptischen Geometrie zu thun. Diese wird von einem gewissen theoretischen Standpunkte aus den Vorzug der größten Symmetrie haben, indem in ihr das Princip der Dualität unbedingt gilt. So z. B. ist hier der Abstand zweier Punkte gleich dem Winkel der beiden Polarebenen, was bei der hyperbolischen Geometrie aus leicht ersichtlichen Grunde nicht der Fall ist. [da wir die von unserer Verfügung abhängenden Constanten c, k für Abstände und Winkel im hyperbolischen Falle von einander verschieden wählen]. Den dritten Fall endlich haben wir überhaupt nicht näher betrachtet, da man bei ihm von jedem Punkte des Raumes aus einen einteiligen Kegel an die Fundamentalfläche legen kann, das Bogenelement also in jedem Teile des Raumes durch eine indefinite Form der Differentiale dx gegeben wird. Dieser Fall ist in der That interesselos für uns, falls uns daran liegt, Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie zu haben. Aus demselben Grunde haben wir uns auch im

Fall der hyperbolischen Geometrie wesentlich auf das Innere der Fundamentalfläche beschränkt, da wir außerhalb derselben wieder ein indefinites Bogenelement haben würden.

Die Euklidische Geometrie ist dann ein specieller Fall der parabolischen Geometrie, die den Uebergangsfall zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie bildet. Ihr liegt eine nullteilige Curve zweiten Grades zu Grunde. Wollten wir vollständig schematisieren, so würden wir noch eine ganze Zahl weiterer specieller Fälle der Maassbestimmungen aufzuzählen haben, je nach der Art der betr. Fundamentalfläche 2ten Grades. (z. B. einteiliger Kegelschnitt, Linienpaar u. s. w.) Doch gehen wir nicht näher darauf ein, da unser Interesse ja wesentlich an den erwähnten drei Fällen haftet:

3.) Im Schluß möchte ich noch einiges über die elliptische Geometrie sagen, was von früher her im Rückstande ist. Wir hatten hier doch zwei besondere Arten von Bewegungen kennen gelernt, die wir als „Schiebungen" bezeichneten. Werden die Variabeln λ, μ in gewohnter Weise auf der Fläche gedeutet, um die Erzeugenden festzulegen, so war z. B. eine Schiebung der ersten Art charakterisiert

dadurch, daß man die μ unverändert ließ, die λ aber einer linearen Substitution unterwarf, die im Fall der reellen Schiebung den Quaternionen-typus annahm:

$$\lambda' = \frac{(A+iC)\lambda - (B-iD)}{(B+iD)\lambda + (A-iC)}.$$

Die zugehörige Substitution der x schrieb sich in der Quaternionensprache alsdann:

$$(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = (A + iB + jC + kD)\cdot(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4).$$

Wir hatten auch bereits gelernt, daß hierbei eine ganze Congruenz reeller gerader Linien in sich verschoben wird. Gemäß unserer früheren Auseinandersetzungen ergiebt sich dann der Satz:

„Unsere specielle Bewegung, welche wir als eine Schiebung des Raumes bezeichneten, hat zweifach ∞ viele Schraubenaxen, indem jeder Punkt des Raumes eine gerade Linie beschreibt und jede Ebene des Raumes sich um eine in ihr liegende gerade Linie dreht." In der That wird jede Linie unserer Congruenz als eine Schraubenaxe unserer Bewegung angesehen werden können, woraus der zweite Theil unseres Satzes folgt, insofern doch durch jeden Punkt des Raumes eine Congruenz-gerade hindurchgeht und in jeder Ebene

des Raumes eine Congruenz-gerade liegt.

Wir können diese Vorstellung einer solchen Bewegung nun aufs schönste beleben, wenn wir die Idee der Continuität anwenden, wie sie ja bereits in den Worten „schrauben" und „Bewegung" liegt. Dieser Idee können wir bereits in den Substitutionen des λ Ausdruck geben. Wenn wir mit ξ, η, ζ auf der λ-Kugel den Endpunkt des Durchmessers festlegen, um welchen sich die Drehung vollzieht, die unserer Substitution von Quaternionentypus entspricht, so war zu setzen:

$$\mathfrak{A} = \cos.\frac{\varphi}{2}.$$

$$\mathfrak{B} = \eta \sin.\frac{\varphi}{2}.$$

$$\mathfrak{C} = \xi \sin.\frac{\varphi}{2}.$$

$$\mathfrak{D} = \zeta \sin.\frac{\varphi}{2},$$

abgesehen von einem unwesentlichen Proportionalitätsfaktor. Setzen wir für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ diese Werte in die Substitutionsformel der x ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = (\cos.\varphi/_2 + (i\eta + j\xi + k\zeta)\sin\frac{\varphi}{2}).$$
$$(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4).$$

Der Idee der Continuität tragen wir nun ganz einfach Rechnung, indem wir den Winkel φ von 0

allmählich wachsen lassen, bis für $\varphi = 2\pi$ alles wieder wird, wie es war. Es bewegt sich dann der Raum mit seinen Punkten längs der einzelnen Schraubenaxen, d.h. der Congruenzlinien so, bis er zur Anfangslage zurückgekommen ist.

Fragen wir nun, wie groß das Stück ist, um welches sich ein Punkt bei einem beliebigen $\measuredangle \varphi$ verschiebt oder wie groß der Winkel ist, um den eine Ebene sich dreht, eine Frage, die wir oben ausdrücklich unerledigt gelassen hatten, so ergiebt sich bei einfacher Ausrechnung der Satz:

„Verstehen wir unter φ die Amplitude der Drehung, welche die λ = Kugel bei festgehaltenem Punkte ξ, η, ζ erfährt, so erleidet unser elliptischer Raum, (bei welchem die Gesammtlänge der geraden Linie gleich π ist) eine Schiebung längs eines bestimmten Strahlensystems, bei welcher jeder Punkt auf der durch ihn gehenden Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ fortschreitet, während sich jede Ebene um die in ihr liegende gerade Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ dreht."

Diesem Satz können wir noch eine besondere Bedeutung geben, wenn wir unsere Aufmerksamkeit

auf eine specielle Art von Flächen 2ten Grades richten, nämlich auf solche Flächen 2ten Grades, die mit der absoluten Fläche zweiten Grades 4 Erzeugende, je zwei der einen und der anderen Art, gemeinsam haben.

Ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche, so wird eine Fläche der verlangten Eigenschaft beispielsweise gegeben durch: $\varrho(x_1^2 + x_2^2) + \sigma(x_3^2 + x_4^2) = 0$, wo ϱ, σ beliebig. Man erhält eine solche ausgezeichnete Fläche 2ten Grades auch leicht geometrisch, indem man aus einer unserer Congruenzen irgend drei Linien herausgreift, die doch unsere Fundamentalfläche in Punkten derselben beiden Erzeugenden z. B. der ersten Art treffen. Nun kann man sofort das Hyperboloid konstruieren, welches diese drei Linien enthält, indem man an ihnen entlang eine gemeinsame Transversale laufen läßt. Dieses Hyperboloid wird unsere Fläche in 2 Erzeugenden der ersten Art treffen, also wird es ihr auch in 2 Erzeugenden zweiter Art begegnen, d. h. eine unserer ausgezeichneten Flächen 2. Grades sein.

„<u>Umgekehrt wird jede ausgezeichnete Fläche 2ten Grades, d. h. jede Fläche, welche die absolute</u>

Fläche in einem windschiefen Vierseit schneidet, mit den Linien ihrer einen Erzeugung einer rechts gewundenen Congruenz und mit den Linien ihrer anderen Erzeugung einer links gewundenen ausgezeichneten Congruenz angehören."

Nun wird doch der Raum mit seinen Punkten sich längs der einzelnen Linien der einen oder anderen Congruenz in besprochener Weise verschieben lassen. Eine ausgezeichnete Fläche zweiten Grades läßt sich daher auf 2 Arten continuierlich in sich selbst überführen, indem man entweder die Erzeugenden der einen Art oder die Erzeugenden der anderen Art als Bahnkurven benutzt. „Da es sich hierbei um eine Collineation des Raumes handelt, bei welcher auch die Erzeugenden der nicht benutzten Art wieder in Erzeugende übergehen müssen, so sehen wir, daß unsere Fläche 2ten Grades die schöne Eigenschaft besitzt, daß 2 Erzeugende der einen Art gleich große Stücke abschneiden. Dies ist die in Aussicht gestellte Folgerung aus dem Satze der p. 231.

Die ausgezeichneten Congruenzen in der elliptischen Geometrie, längs denen sich der Raum verschieben kann und die ausgezeichneten Flächen, deren Erzeugende den Congruenzen der einen oder

der anderen Art angehören, das sind nun die Gebilde, auf die seiner Zeit Clifford zuerst die Aufmerksamkeit lenkte. Ich möchte seine bezüglichen Ideen hier um so lieber erwähnen, als dieselben nicht publiciert sind. Es war auf der Versammlung der British Association zu Bradford 1873 (der ich selbst beiwohnte), wo Clifford diese Dinge in einem Vortrage mitteilte. In den Reports of the British Association wird davon indeß nichts als die Ueberschrift angegeben: „On a surface of zero curvature and finite extent," die sich auch in den gesammelten Werken von Clifford ohne jede Erläuterung wieder findet.

Es läßt sich zeigen, eben aus ihrem Verhalten bei den Schiebungen, daß unsere ausgezeichneten Flächen, in dem elliptischen Raume, der sie enthält, wirklich das Krümmungsmaass 0 besitzen; außerdem sieht man leicht, daß selbstverständlich ihr Gesammtflächeninhalt endlich ist, weil ja die Länge der erzeugenden geraden Linien eine endliche ist; womit ein erstes Beispiel dafür gegeben ist, daß eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die das Krümmungsmaass Null besitzt, nicht ∞ ausgedehnt zu sein braucht.*

*) In der That bin ich zu den allgemeinsten Erläuterungen

Aber das Interessante, was Clifford hinzufügte, waren einige Bemerkungen bezüglich der Definition des Parallelismus, die besonders unsere Aufmerksamkeit verdienen, da ja die erste Entwickelung der nicht-Euklidischen Geometrie bekanntlich gerade an die Frage, was Parallelen seien, anknüpfte.

Unsere nicht-Euklidische Definition des Parallelismus soll eine Generalisierung der gewöhnlichen Definition sein. Nun hat man aber den Begriff „parallel" vor Clifford nur in einer Weise generalisiert, indem man sagt: Parallele Linien sind solche Linien, welche einen ∞ fernen Punkt gemein haben. Diese Definition geht ja in der That in die gewöhnliche über, wenn wir von einer ∞ fernen Ebene sprechen. Uebrigens aber giebt es ihr zufolge im hyperbolischen Raum 2 Parallele durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden, im elliptischen Raum aber giebt es überhaupt keine Parallelen, da es ja auch keinen ∞ weiten Punkt giebt.

Den so definierten Parallelen des nicht Euklidischen Raumes geht jedoch ziemlich die Gesammtheit der eleganten und bequemen Eigenschaften ab,

*) hierüber, die ich im Wintersemester gab, von Cliffords Bemerkung aus gekommen.

welche wir bei den Parallellinien des Euklidischen Raumes kennen.

In der Euklidischen Geometrie können wir z. B. den Raum in den Parallellinien verschieben, nicht aber in der nicht-Euklidischen Geometrie, sofern wir eben an der genannten Definition der Parallelen im nicht-Euklidischen Raume festhalten.

Dem gegenüber bringt Clifford in Vorschlag, zwei Linien parallel zu nennen, wenn sie derselben ausgezeichneten Congruenz der einen oder der anderen Art angehören, d. h. wenn sie dieselben 2 Erzeugenden der einen resp. der anderen Art der Fundamentalfläche gleichzeitig treffen. Im hyperbolischen Raume sind diese Parallelen natürlich imaginär, im elliptischen Raume aber giebt es zweierlei Arten, die rechts gewundenen und die links gewundenen Parallelen. Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie kann ich zu ihr 2 Parallele ziehen, eine rechts gewundene und eine links gewundene. Im speciellen Falle des Euklidischen Raumes gehen sie in die gewöhnlichen Parallelen über. Der Unterschied der neuen Parallelen des elliptischen Raumes von den Parallelen der Euklidischen Geometrie ist natürlich der, daß sie windschief sind, solange

nicht der nicht-Euklidische Raum in einem Euklidischen ausartet, dagegen haben sie mit den gewöhnlichen Parallelen die Eigenschaft gemein; gleichzeitig die Trajektorien ein- und derselben Raumbewegung bilden zu können. Hierauf beruht es dann, dass bei dieser Definition der Parallellinien im nicht-Euklidischen Raume fast alle geometrischen Sätze und Eigenschaften, die in der Elementargeometrie über Parallellinien aufgestellt werden, sich wieder finden.

„Beispielsweise können wir die Eigenschaft der ausgezeichneten Flächen 2ten Grades, die wir eben kennen lernten, jetzt dahin aussprechen, daß dieselbe durch ihre Erzeugenden in lauter Parallelogramme zerlegt wird, wobei mit dem Wort Parallelogramm im Gegensatze zur Euklidischen Geometrie eine Figur bezeichnet wird, die nicht eben ist, aber übrigens fast alle Eigenschaften des gewöhnlichen Parallelogramms besitzt."

Hiermit schließe ich die gegenwärtige Vorlesung. Es ist mir eine Genugthuung, daß ich zuletzt noch in ausgiebiger Weise der Clifford'schen Ideen habe gedenken können. In der That habe ich mich wenigen Geometern so eng verbunden gefühlt, als eben, vom Zeitpunkte

unserer persönlichen Bekanntschaft an, (1873), Clifford, den wenige Jahre darauf eine unselige Krankheit wegraffte, so daß uns Ueberlebenden die Pflicht blieb, die fundamentalen Gedanken, mit denen er sich trug, und die aus seinen fragmentarischen Publicationen nur unvollkommen zu erkennen sind, von uns aus zu erläutern und zu verbreiten.

(Ende.)

Date Due

4/19/52			

BOSTON COLLEGE
3 9031 01528427 6

For Reference

Not to be taken from this room

150089

BOSTON COLLEGE SCIENCE LIBRARY

QA 685 K6

MATH. DEPT.

BOSTON COLLEGE LIBRARY
UNIVERSITY HEIGHTS
CHESTNUT HILL, MASS.

Books may be kept for two weeks and may be renewed for the same period, unless reserved.

Two cents a day is charged for each book kept overtime.

If you cannot find what you want, ask the Librarian who will be glad to help you.

The borrower is responsible for books drawn on his card and for all fines accruing on the same.